目　　录

第一章　预备知识

§1　Lebesgue 积分

本节将简要地介绍一下 Lebesgue 积分理论。它是本书的一个最基本的工具。我们不可能在较短的篇幅中完整地叙述这一理论。在这里，仅仅给出 Lebesgue 积分理论的主要思路和有关结论，而略去详细的证明过程。对此有兴趣的读者可以参考有关实变函数的教程。对于不太熟悉数学的读者，可以跳过本节而将本书后面用到的所有积分理解为普通高等数学教程中的 Riemann 积分。这不会影响对所有结论的理解。

首先回顾一下有关的集合运算。对于集合 A 和 B，我们定义它们的并集、交集和差集分别为

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A\backslash B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

此处，$x\in A$ 表示 x 是 A 中一个元素，而 $x\notin B$ 表示 x 不是 B 中的元素。类似地，我们可以定义有限个或可列个(即可以用自然数来编号的)集合的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 和交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。有时，我们常考虑一个固定的大集合 X 和它的子集 A，此时常称

$$A^c\equiv X\backslash A$$

为 A 的余集。我们可以验证下述的 de Morgan 公式：设 A_i

为X的子集，记作$A_n\subset X$，$n\geqslant 1$，可以是有限个，也可以是无限个，则有

$$\begin{cases}(\bigcup_n A_n)^c=\bigcap_n A_n^c,\\(\bigcap_n A_n)^c=\bigcup_n A_n^c.\end{cases}\tag{1.1}$$

给定实数轴上的一个区间$[a,b]$，我们将引进这上面的Lebesgue测度和Lebesgue可测集。为此，先令

$$\mathcal{O}=\{[\alpha,\beta);a\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant b\}\cup\{[\alpha,b];a\leqslant\alpha\leqslant b\}.$$

可见，$\mathcal{O}$是$[a,b]$区间的一些子区间构成的集合，故称之为一个区间族。

定义 1.1 设X为一个集合，设$\mathscr{A}$是一个X的子集族(即由X的一些子集构成的集合)。我们称$\mathscr{A}$是一个σ-域，如果它满足下述条件：

(i) $X\in\mathscr{A}$，

(ii) 对任何$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$，有$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$，

(iii) 对任何A、$B\in\mathscr{A}$，有$A\backslash B\in\mathscr{A}$。

在上面的定义中，条件(ii)和(iii)分别称为$\mathscr{A}$关于可列并和差集运算是封闭的。

对于集族$\mathcal{O}$，我们将其中的元素(即子区间)作可列并、可列交、差集等运算，然后将得到的结果放入$\mathcal{O}$，再将所得到的扩大了的$\mathcal{O}$重复上述过程。如此反复地做下去，可以利用超限归纳法证明，最终可以得到一个子集族，记它为$\mathscr{B}[a,b]$。它是一个σ-域，且是包含$\mathcal{O}$的最小的σ-域。我们注意到，若令

$$2^{[a,b]}=\{[a,b]\text{的子集全体}\},$$

则易知它是一个σ-域。这个σ-域很大，可以证明

$$\mathscr{B}[a,b]\neq 2^{[a,b]}.\tag{1.2}$$

我们称 $\mathscr{B}[a, b]$ 为 $[a, b]$ 上的 Borel 域。

接下来，我们定义一个映照 μ: $\mathscr{B}[a, b] \to \mathbf{R}^+ \equiv [0, \infty)$ 如下：对任何 $[\alpha, \beta) \in \mathscr{O} \subset \mathscr{B}[a,b]$，

$$\mu([\alpha, \beta)) = \beta - \alpha,$$

而对于 $[\alpha, b] \in \mathscr{O}$，

$$\mu([\alpha, b]) = b - \alpha.$$

因此，μ 在 $\mathscr{O}$ 上表示的就是区间长度. 然后，对于任何一列两两不相交的区间 $\{[\alpha_i, \beta_i)\}_{i \geq 1}$，我们定义

$$\mu(\bigcup_{i \geq 1}[\alpha_i, \beta_i)) = \sum_{i \geq 1}(\beta_i - \alpha_i).$$

利用这种方法，我们可以逐步地将 μ 延拓到整个 $\mathscr{B}[a, b]$ 上，使得它满足下述条件：

1° $\mu(\phi) = 0$，(ϕ 表示空集)

2° $\forall B \in \mathscr{B}[a, b]$，$\mu(B) \geq 0$，(非负性)

3° $\forall B_i \in \mathscr{B}[a, b]$，$i \geq 1$，$B_i \cap B_j = \phi (i \neq j)$，均有

$$\mu(\bigcup_{i \geq 1} B_i) = \sum_{i \geq 1} \mu(B_i),\text{（可列可加性）}$$

进一步，我们令

$\mathscr{L}[a, b] = \{L \subset [a, b]$: $\exists B \in \mathscr{B}[a, b]$ 和 $B_N \supset N$，$B_N \in \mathscr{B}[a, b]$，使得

$$\mu(B_N) = 0,\ L = B \cup N\},$$

易知，$\mathscr{L}[a, b] \supset \mathscr{B}[a, b]$. 我们将 μ 按下述方式延拓到 $\mathscr{L}[a, b]$：$\forall L \in \mathscr{L}[a, b]$，存在分解 $L = B \cup N$，其中 $B \in \mathscr{B}[a, b]$，$N \subset B_N \in \mathscr{B}[a, b]$，$\mu(B_N) = 0$. 我们定义

$$\mu(L) = \mu(B).$$

尽管，对于一个 L，形如 $L = B \cup N$ 的分解不是唯一的，但是可以证明按上述方式延拓的值 $\mu(L)$ 是唯一确定的。这样，我们得到了一个 $[a, b]$ 的子集族 $\mathscr{L}[a, b]$，它也是一个 σ-域，

以及定义于该σ-域上的一个非负函数μ。容易知道，这个μ作为$\mathscr{L}[a, b]$上的映照仍然满足前述的三条性质$1°\sim3°$。我们常称$\mathscr{L}[a, b]$为$[a, b]$上的Lebesgue σ-域，μ为$[a, b]$上的Lebesgue测度，而任何子集$L\in\mathscr{L}[a,b]$称为Lebesgue可测集。当$L\in\mathscr{L}[a, b]$，使得$\mu(L)=0$时，称L为零测集。

现在，让我们来考虑函数$f: [a,b]\to\boldsymbol{R}$。称$f$是Lebesgue可测的(简称可测的)，如果对任何$c\in\boldsymbol{R}$，

$$(f>c)\equiv\{t\in[a, b]: f(t)>c\}\in\mathscr{L}[a, b].$$

而若上式中的$\mathscr{L}[a, b]$改成$\mathscr{B}[a, b]$，则称f是Borel可测的。关于可测函数，有下述结论：

命题 1.2 (i) 设$E\subset[a, b]$，令$\chi_E(t)$为E的特征函数，即

$$\chi_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E,\\ 0, & t\notin E.\end{cases}$$

则$E\in\mathscr{L}[a, b]$当且仅当χ_E是可测函数。

(ii) 若f和g均是可测的，$\alpha, \beta\in\boldsymbol{R}$，则$\alpha f+\beta g$、$f\cdot g$、$f/g$(当$g\neq0$时)、$\max\{f, g\}$、$\min\{f, g\}$、$|f|$均是可测的。

(iii) 若f_n可测，则$\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$、$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$、$\sup\limits_n f_n$、$\inf\limits_n f_n$均是可测的。

(iv) 若f可测，则存在一列$\{f_n\}$，每个f_n均是可测集的特征函数的有限线性组合(这样的函数称为简单函数)，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=f(t),\ \forall t\in[a, b].$$

(v) f可测当且仅当对任何$c\in\boldsymbol{R}$，$(f\geqslant c)$、$(f<c)$、$(f\leqslant c)$均是可测的。此处，$(f\geqslant c)$、$(f<c)$和$(f\leqslant c)$的定义

类似于$(f>c)$。

在考虑可测函数时，下述概念是非常重要的。

定义 1.3 称两个函数 f 和 g 是几乎处处相等的，如果

$$\begin{cases}(f\neq g)\equiv\{t\in[a,b]: f(t)\neq g(t)\}\in\mathscr{L}[a,b],\\ \mu(f\neq g)=0.\end{cases}\tag{1.3}$$

对于函数列$\{f_n\}$和函数 f，我们称 f_n 几乎处处收敛于 f，如果

$$\begin{cases}(\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f)\equiv\{t\in[a,b]:\\ \qquad\qquad \lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)\}\in\mathscr{L}[a,b],\\ \mu(\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f)=[a,b].\end{cases}\tag{1.4}$$

即 f_n 不收敛于 f 的点集是一个零测集。

当 f 和 g 几乎处处相等时，我们常记作为

$$f(t)=g(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a,b],$$

而当 f_n 几乎处处收敛于 f 时，我们将其记作

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a,b].$$

命题 1.4 (i)若 f 是可测的，则存在 Borel 可测函数 g，使得

$$f(t)=g(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a,b].\tag{1.5}$$

(ii) 若 f_n 可测，且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a,b],\tag{1.6}$$

则 f 是可测的。

进一步，还有下面更深刻的定理。

定理 1.5(Лузин 鲁津) 设 f 为 $[a,b]$ 上的可测函数，则对任何 $\delta>0$，存在连续函数 g，使得

$$\mu(f\neq g)<\delta.\tag{1.7}$$

定理 1.6 (Егоров 爱戈洛夫) 设$\{f_n\}$是$[a, b]$上的一列可测函数，它几乎处处收敛于有限函数f，则对任何的$\delta>0$，存在可测子集$E_\delta\subset[a, b]$，使得

$$\mu([a, b]\setminus E_\delta)<\delta, \tag{1.8}$$

而f_n在E_δ上一致收敛于f。

上面这些结论的证明可以参看有关实变函数教科书。(例如参考文献[4])

现在，引进$[a, b]$上的 Lebesgue 积分。为此，取定一个有界可测函数$f:[a, b]\to\mathbf{R}$。故不妨设

$$|f(t)|\leqslant M, t\in[a, b]. \tag{1.9}$$

将区间$[-M, M]$作分割$D: -M=l_0<l_1<\cdots\cdots<l_k=M$。记

$$\delta(D)=\max_i(l_i-l_{i-1}),$$

$$E_i=\{t\in[a, b]: l_{i-1}\leqslant f(t)<l_i\}$$
$$=(f<l_i)\cap(f<l_{i-1})^c.$$

并任取$\xi_i\in[l_{i-1}, l_i)$，作和式(注意每个E_i均是可测的)。

$$S(D)=\sum_{i=1}^k\xi_i\mu(E_i). \tag{1.10}$$

若存在$s\in\mathbf{R}$，使得对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$\delta(D)<\delta$时必有

$$|S(D)-s|<\varepsilon. \tag{1.11}$$

则称f在$[a, b]$上是 Lebesgue 可积的，并记

$$S=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

在数学分析教程中，我们知道存在 Riemann 不可积的有界函数。最典型的是所谓的 Dirichlet 函数

$$D(t)=\begin{cases}1, & t\text{ 为}[0, 1]\text{中无理数}, \\ 0, & t\text{ 为}[0, 1]\text{中有理数}.\end{cases}$$

利用可测函数的定义，读者不难验证上述函数是可测的。故它是一个有界可测函数。于是，下面的命题说明 Lebesgue 积分要比 Riemann 积分有更广的适用范围。

命题 1.7 区间 $[a, b]$ 上的有界可测函数必是 Lebesgue 可积的。

在上面的基础上，可以来定义一般的可测函数（未必是有界的）的 Lebesgue 可积性了。为此，令 $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ 为一个可测函数，未必有界。对任何 $\alpha, \beta > 0$，我们记

$$[f]_{-\alpha}^{\beta} = \begin{cases} -\alpha, & f < -\alpha, \\ f, & -\alpha \leqslant f \leqslant \beta, \\ \beta, & f > \beta. \end{cases} \tag{1.13}$$

易见，$[f]_{-\alpha}^{\beta}$ 在 $[a, b]$ 上是有界可测的。事实上，有界性是显然的，因为

$$-\alpha \leqslant [f]_{-\alpha}^{\beta} \leqslant \beta.$$

其次，对任何的 $c \in \boldsymbol{R}$，若 $c \geqslant \beta$，则

$$([f]_{-\alpha}^{\beta} > c) = \phi \in \mathscr{L}[a, b],$$

若 $c < -\alpha$，则

$$([f]_{-\alpha}^{\beta} > c) = [a, b] \in \mathscr{L}[a, b],$$

若 $-\alpha \leqslant c \leqslant \beta$，则

$$([f]_{-\alpha}^{\beta} > c) = (f > c) \in \mathscr{L}[a, b].$$

因此，$[f]_{-\alpha}^{\beta}$ 是可测的。于是，由命题 1.7 知，它在 $[a, b]$ 上是 Lebesgue 可积的。若两重极限

$$\lim_{\alpha, \beta \to \infty} \int_a^b [f(t)]_{-\alpha}^{\beta} \mathrm{d}t$$

存在，则称 f 是在 $[a, b]$ 上 Lebesgue 可积的，记该积分为

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}t = \lim_{\alpha, \beta \to \infty} \int_a^b [f(t)]_{-\alpha}^{\beta} \mathrm{d}t. \tag{1.14}$$

对于任何可测集 $E \subset [a, b]$，定义

$$\int_E f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\chi_E(t)\mathrm{d}t. \qquad (1.15)$$

也就是说，f 称为在 E 上 Lebesgue 可积的，如果 $f(t)\chi_E(t)$ 在 $[a,b]$ 上是 Lebesgue 可积的。今后，简称 Lebesgue 可积函数为可积函数。对于 Lebesgue 积分，有下述结论。

定理 1.8 (i) 设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积，则对任何 $\alpha, \beta\in \boldsymbol{R}$，$\alpha f+\beta g$ 也是可积的，且

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g\mathrm{d}t, \qquad (1.16)$$

(ii) 设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积，且

$$f(t)\geqslant g(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a, b], \qquad (1.17)$$

则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t. \qquad (1.18)$$

(iii) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t. \qquad (1.19)$$

(iv) 若 f 在 $[a, b]$ 上可测，g 在 $[a, b]$ 上可积，且

$$|f(t)|\leqslant g(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a, b], \qquad (1.20)$$

则 f 在 $[a, b]$ 上也可积。

(v) 若 f 可积，且

$$\begin{cases} f(t)\geqslant 0,\ \text{a.e.}\ t\in[a, b], \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0, \end{cases} \qquad (1.21)$$

则

$$f(t) = 0,\ \text{a.e.}\ t\in[a, b]. \qquad (1.22)$$

(vi) 若 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，则 f 也在 $[a, b]$ 上 Lebesgue 可积，且两个积分相等。

(vii) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积，E_1、E_2 为 $[a, b]$ 的可测子集，$E_1\cap E_2=\phi$，$E_1\cup E_2=[a, b]$，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_{E_1} f(t)\mathrm{d}t+\int_{E_2} f(t)\mathrm{d}t \tag{1.23}$$

(viii) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任何可测集 $E\subset[a, b]$，只要 $\mu(E)<\delta$，便成立

$$\int_E |f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon。 \tag{1.24}$$

(ix) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $[a, b]$ 上的连续函数 φ，使得

$$\int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon。 \tag{1.25}$$

下面的三个定理在 Lebesgue 积分理论中占据很重要的位置。在以后的应用中，也有很大的用处。

定理 1.9 **(控制收敛定理)** 设 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上可积，且存在可积函数 F，使得

$$|f_n(t)|\leqslant F(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a, b], \tag{1.26}$$

又假设

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=f(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a, b], \tag{1.27}$$

则 f 必可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t。 \tag{1.28}$$

定理 1.10 **(Levi 引理)** 设 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上可积，单调增加，即

$$f_n(t)\leqslant f_{n+1}(t),\ \text{a.e.}\ t\in[a, b],\ \forall n\geqslant 1。 \tag{1.29}$$

再设

$$\sup_n\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t<\infty。 \tag{1.30}$$

则 f_n 必几乎处处收敛于一个可积函数 f，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.31}$$

定理1.11 (Fatou 引理) 设$\{f_n\}$在$[a, b]$上可积，且存在一个可积函数 g，使得

$$f_n(t)\geqslant g(t), \text{ a.e. } t\in[a, b]. \tag{1.32}$$

则

$$\int_a^b \varliminf_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t. \tag{1.33}$$

以上的结果均可在标准的有关 Lebesgue 积分理论的教材中找到详细的证明(见参考文献[4])。

在本书中，将要用到关于取值于 $\boldsymbol{R}^n$ 的函数的积分。因此，我们需要将前述的关于数值函数的积分理论略为推广一些。考虑 f: $[a, b]\to\boldsymbol{R}^n$。由于 f 取值于 $\boldsymbol{R}^n$，故按分量，将 $f(t)$写成

$$f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}, \ f_i(t)\text{均为数值函数}, \tag{1.34}$$

称 f 是可测的，如果每个分量 f_i 均是可测的。称 f 是可积的，如果每个 f_i 是可积的，此时，定义

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t\\ \int_a^b f_2(t)\mathrm{d}t\\ \vdots\\ \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

值得注意的是，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个向量而不是一个实

数。

容易知道，几乎所有关于数值函数的结论对现在的 $\boldsymbol{R}^n$ 值的函数也都成立。所不同的是，绝对值 $|\cdot|$ 应该换成范数 $\|\cdot\|$，此处，

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n.$$

另外，需要注意的是定理1.8中的(ii)和(v)以及定理1.10和1.11不再有意义（或需要作适当的修改）。有兴趣的读者可以自行完成有关结论的叙述以及借助于数值函数的结论来证明向量值函数的结果。在此不再赘述。

最后，再讲一下所谓的 p 次可积函数。设 $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ 为一个可测函数，则易知，$|f(t)|^p$ 也是可测的。若 $|f(t)|^p$ 是在 $[a, b]$ 上可积的，称 f 为 p 次可积的。记 $L^p(a, b)$ 为全体 p 次可积函数。对于 f 是 $\boldsymbol{R}^n$ 值函数时，可以同样定义 p 次可积性。常以 $L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$ 记全体 p 次可积取值于 $\boldsymbol{R}^n$ 的函数。今后，仅对 $p \geqslant 1$ 感兴趣。因此，总设 $p \geqslant 1$ 而不加说明。对于 $f \in L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$，常称之为 L^p-函数。下面的结果很有用。

定理 1.12 （Hölder 不等式） 设 p 和 q 满足

$$p、q \geqslant 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

（p 和 q 互称为共轭数）。设 $f \in L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$，$g \in L^q(a, b; \boldsymbol{R}^n)$，则（设 $f(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$，$g(t) = (g_1(t), \cdots, g_n(t))$）

$$(f(t), g(t)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(t) \in L^1(a, b) \tag{1.36}$$

且

$$\int_a^b |(f(t), g(t))| \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b \|f(t)\|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}, \quad (1.37)$$

特别，当$n=1, p=q=2$时，得到熟知的 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}. \quad (1.38)$$

对于任何的 $f \in L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$，$1 \leqslant p < \infty$，我们常记

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b \|f(t)\|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty, \quad (1.39)$$

$$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{\mu(E)=0 \\ E \subset [a,b]}} \left(\sup_{[a,b] \setminus E} \|f(t)\|\right) = \operatorname*{ess\,sup}_{[a,b]} \|f(t)\|. \quad (1.40)$$

上式右端称为$\|f(t)\|$的本性上界。称$\|\cdot\|_p$为 f 的 L^p 范数。我们有下述的定理。

定理 1.13 (Minkowski 不等式) 设 $p \geqslant 1$，$f, g \in L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$，则 $f + g \in L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$，且有

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (1.41)$$

利用上述定理，易见 $L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$是一个线性空间，且有一个范数$\|\cdot\|_p$。所以，$L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)$ 称为是一个线性赋范空间。这个空间用处很大，我们将会多次遇到它。

利用前面的方法，也可以定义 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集和 Lebesgue 测度。当然也就可以定义 $\boldsymbol{R}^n$ 中函数的 Lebesgue 积分，这就相当于数学分析教程中的多重积分的推广。

§2 常微分方程理论

本节将介绍具有可积右端的常微分方程的一些基本知识。这里涉及的一些结果将在本书中起基本的作用。

首先，给出下述的定义。

定义 2.1 函数 $z(\cdot)$: $[a, b]\to \boldsymbol{R}^n$ 称为是绝对连续的，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任何一列两两不相交的子区间 $(\alpha_i, \beta_i)\subset[a, b]$，只要

$$\sum_i(\beta_i-\alpha_i)<\delta, \tag{2.1}$$

必有

$$\sum_i\|z(\beta_i)-z(\alpha_i)\|<\varepsilon. \tag{2.2}$$

对于绝对连续函数，可以证明下述结论。

命题 2.2 设 $z(\cdot)$: $[a, b]\to \boldsymbol{R}^n$ 是一个给定的函数，则下述命题等价：

1° $z(\cdot)$是绝对连续的。

2° $z(\cdot)$几乎处处有有限导数，导函数 $z'(\cdot)$ 是可积的，且牛顿—莱布尼兹公式成立：

$$z(t)-z(a)=\int_a^t z'(\tau)\mathrm{d}\tau,\ \forall t\in[a, b]. \tag{2.3}$$

今后，将定义于$[a, b]$取值于 $\boldsymbol{R}^n$ 的绝对连续函数全体记作 $W^{1,1}([a, b];\boldsymbol{R}^n)$。我们注意到，若 $z(\cdot)$是 Lipschitz 连续的，即存在常数 $C>0$，使得

$$\|z(t)-z(\hat{t})\|\leqslant C|t-\hat{t}|,\ \forall t, \hat{t}\in[0, T],$$

则 $z(\cdot)$必是绝对连续的。特别地，任何 C^1 函数必是绝对连续的。另外，绝对连续函数必然是连续的。因此，我们若将全体定义于$[a, b]$，取值于 $\boldsymbol{R}^n$ 的 C^1 函数、Lipschitz 连续函数

以及普通的连续函数分别记为 $C^1([a, b]; \boldsymbol{R}^n)$、$W^{1,\infty}([a, b]; \boldsymbol{R}^n)$ 和 $C([a, b]; \boldsymbol{R}^n)$，则有如下的包含关系：

$$
\begin{aligned}
&C^1([a, b]; \boldsymbol{R}^n) \subset W^{1,\infty}([a, b]; \boldsymbol{R}^n) \\
&\subset W^{1,1}([a, b]; \boldsymbol{R}^n) \subset C([a, b]; \boldsymbol{R}^n).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

现在，取定一个正常数 $T>0$。令 $f: [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 为一给定的映照，满足下述条件：

(i) 对任何固定的 $x \in X$，$f(\cdot, x): [0, T] \to \boldsymbol{R}^n$ 是可测的；

(ii) 存在常数 $L>0$，使得

$$
\|f(t, x) - f(t, \hat{x})\| \leqslant L\|x - \hat{x}\|, \quad \text{a.e.} t \in [0, T], \forall x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n \tag{2.5}
$$

$$
\|f(t, x)\| \leqslant L(1 + \|x\|), \quad \text{a.e.} t \in [0, T], \forall x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2.6}
$$

由上可见，$f(t, x)$ 未必关于 (t, x) 连续。下面的引理是基本的。

引理 2.3 设 $f: [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 满足 (i) 和 (ii)。则对任何连续函数 $x(\cdot) \in C([0, T]; \boldsymbol{R}^n)$，函数 $f(\cdot, x(\cdot)): [0, T] \to \boldsymbol{R}^n$ 是可积的。

证 利用 (2.6) 我们知道，$f(\cdot, x(\cdot))$ 是一个有界函数，因为连续函数 $x(\cdot)$ 是有界的。所以，为证明 $f(\cdot, x(\cdot))$ 的可积性，只需要证明它的可测性。由于 $x(\cdot)$ 是连续的，可以找到一列阶梯函数

$$
\varphi_k(t) \equiv \sum_{i \geq 1} a_i^k \chi_{[t_i^k, t_{i+1}^k)}(t)
$$

满足

$$
\lim_{k \to \infty} \|\varphi_k(t) - x(t)\| = 0, \text{ 关于 } t \in [0, T] \text{ 一致。} \tag{2.7}
$$

从而，

$$\lim_{k\to\infty} f(t, \varphi_k(t)) = f(t, x(t)),\ \text{a.e.}\ t\in[0, T]. \quad (2.8)$$

注意到

$$f(t, \varphi_k(t)) = \sum_{i\geq 1} f(t, a_i^k)\chi_{[t_i^k, t_{i+1}^k)}(t).$$

而和式中每一项均是可测的，因此，$f(t, \varphi_k(t))$是可测的。由(2.8) 式以及可测函数的性质知道，$f(t, x(t))$ 也是可测的。

现在，考虑下述常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ \text{a.e.}\ t\in[0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

此处，$\dot{x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$。函数 $x(\cdot)$ 称为(2.9)式的一个解，如果 $x(\cdot)\in W^{1,1}([0, T]; \boldsymbol{R}^n)$，满足$x(0)=x_0$，且(2.9)式中的方程几乎处处成立。我们注意到，与普通常微分教程中不同之处是，方程的右端未必连续，但由引理 2.3 知道具有较好的可积性。因此，称(2.9)式中的方程是具有可积右端的。这种方程在控制理论中极为基本，因为控制函数不能期望是连续的。在以后的讨论中，将会清楚地看到这一点。

定理 2.4 （解的存在唯一性定理） 设 $f: [0, T]\times\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 满足条件 (i)～(ii)。则对任何的 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$，初值问题 (2.9)存在唯一的解 $x(\cdot)\in W^{1,1}([0, T]; \boldsymbol{R}^n)$。

证 置

$$x^0(t) = x_0,\ t\in[0, T], \quad (2.10)$$

令

$$x^m(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x^{m-1}(\tau))\mathrm{d}\tau,$$
$$t\in[0, T],\ m\geq 1. \quad (2.11)$$

注意到，在归纳定义中，当 $x^{m-1}(\cdot)$定义好后，它是一个连续

函数。因此，由引理 2.3 知(2.11)式中的积分存在。故 $x^m(\cdot)$ 的定义是明确的。现在，作下述估计：

$$\|x^1(t)-x^0(t)\|\leqslant\int_0^t\|f(\tau,x_0)\|\mathrm{d}\tau\leqslant L(1+\|x_0\|)t,\quad t\in[0,T].$$

$$\|x^2(t)-x^1(t)\|\leqslant L\int_0^t\|x^1(\tau)-x^0(\tau)\|\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant(1+\|x_0\|)\frac{(Lt)^2}{2!},\qquad t\in[0,T].$$

$$\|x^3(t)-x^2(t)\|\leqslant(1+\|x_0\|)\frac{(Lt)^3}{3!},\qquad t\in[0,T].$$

………… …………

利用归纳法，可以得到下述的估计：

$$\|x^m(t)-x^{m-1}(t)\|\leqslant(1+\|x_0\|)\frac{(Lt)^m}{m!},\ t\in[0,T].\tag{2.12}$$

我们注意到

$$x^m(t)=x_0+\sum_{k=1}^m[x^k(t)-x^{k-1}(t)],$$

因此，对于 $l\geqslant0$，有

$$\|x^m(t)-x^{m+l}(t)\|\leqslant\sum_{k=1}^l\|x^{m+k}(t)-x^{m+k-1}(t)\|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^l(1+\|x_0\|)\frac{(LT)^{m+k}}{(m+k)!}$$

$$\leqslant(1+\|x_0\|)\sum_{k=m}^\infty\frac{(LT)^k}{k!}.$$

由于 $\sum_{k=0}^\infty\frac{(LT)^k}{k!}=e^{LT}$ 是收敛的，故上式右端当 $m\to\infty$ 时趋于零，且关于 $t\in[0,T]$ 是一致的。因此，$\{x^m(\cdot)\}$ 在 $C([0,T];\mathbf{R}^n)$ 中是一个 Cauchy 序列。从而，存在连续函数 $x(\cdot)$，

使得

$$\lim_{m\to\infty}\|x^m(t)-x(t)\|=0,\text{ 关于 } t\in[0,T]\text{ 一致}。\tag{2.13}$$

于是，在(2.11)的两边取极限知

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,\ t\in[0,T]。\tag{2.14}$$

由此，立即得知 $x(\cdot)$ 是绝对连续的，且

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)),\ \text{a.e.}\, t\in[0,T]。\tag{2.15}$$

而显见 $x(0)=x_0$，故知由上得到的 $x(\cdot)$ 是(2.9)的一个解。这便证得了解的存在性。今若 $\bar{x}(\cdot)\in W^{1,1}([0,T];\boldsymbol{R}^n)$ 也是(2.9)的一个解，则有

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant L\int_0^t\|x(\tau)-\bar{x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau,t\in[0,T],\tag{2.16}$$

如果记

$$\varphi(t)=\int_0^t\|x(\tau)-\bar{x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau,\ t\in[0,T],$$

则有

$$\varphi'(t)\leqslant L\varphi(t),\ t\in[0,T]。$$

从而，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(t)e^{-Lt}]\leqslant 0,\ t\in[0,T]。$$

关于 t 在任何区间 $[0,s]$ 上积分并注意 $\varphi(0)=0$，可得

$$\varphi(s)e^{-Ls}\leqslant 0,\ s\in[0,T]。$$

因此，再由(2.16)可知

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant L\varphi(t)\leqslant 0,\ \forall t\in[0,T]。$$

故只能

$$x(t)=\bar{x}(t),\ \forall t\in[0,T]。$$

这便证得了解的唯一性。

我们看到，上述定理的证明与右端函数 f 为连续函数时的证明基本相同。但是，允许方程右端为可积型的 f 给控制

理论的研究提供了有力的工具。

现在，再来讨论一下问题(2.9)的解的一些性质。为了以后章节中讨论的方便，考虑下述问题：设 $(t, x)\in[0, T)\times\boldsymbol{R}^n$，而记 $y(\cdot)\equiv y(\cdot\,;t, x)\equiv y_{t,x}(\cdot)$ 为下述问题的唯一解：

$$\begin{cases}\dot{y}(s)=f(s, y(s)), \text{ a.e. } s\in[t, T],\\ y(t)=x.\end{cases}\tag{2.17}$$

容易知道，由类似于定理 2.4 的证明，可得上述问题解 $y_{t,x}(\cdot)$ 的存在唯一性。为了进一步研究解 $y_{t,x}(\cdot)$ 的性质，先证明下面的引理。

引理 2.5 (Gronwall 不等式) 设 $\varphi(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$: $[a, b]\to\boldsymbol{R}^+$ 均为非负可测函数，它们之间满足

$$\varphi(s)\leqslant\alpha(s)+\int_a^s\beta(\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \text{ a.e. } s\in[a, b].\tag{2.18}$$

则

$$\varphi(s)\leqslant\alpha(s)+\int_a^s e^{\int_r^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\beta(r)\alpha(r)\mathrm{d}r, \quad \text{a.e. } s\in[a, b].\tag{2.19}$$

若 $\alpha(\cdot)\in C^1[0, T]$，则进一步有

$$\varphi(s)\leqslant\alpha(a)e^{\int_a^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_a^s\alpha'(r)e^{\int_r^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}r, \quad \text{a.e. } s\in[a, b].\tag{2.20}$$

证 记

$$\theta(s)=\int_a^s\beta(\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \; s\in[a, b].\tag{2.21}$$

则由(2.18)知

$$\theta'(s)=\beta(s)\varphi(s)\leqslant\beta(s)\alpha(s)+\beta(s)\theta(s), \text{a.e. } s\in[a,b].$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\theta(s)e^{-\int_a^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right]\leqslant e^{-\int_a^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\beta(s)\alpha(s),$$

$$\text{a.e. } s\in[a,\ b].$$

关于 s 积分注意到 $\theta(a)=0$，可得

$$\theta(s)e^{-\int_a^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\leqslant\int_a^s e^{-\int_a^r\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\beta(r)\alpha(r)\mathrm{d}r,$$

因此，代入(2.18)可得

$$\begin{aligned}\varphi(s)&\leqslant\alpha(s)+\theta(s)\\&\leqslant\alpha(s)+\int_a^s e^{\int_r^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\beta(r)\alpha(r)\mathrm{d}r,\\&\quad\text{a.e. } s\in[a,\ b].\end{aligned}$$

这便证得了(2.19)。今若 $\alpha(\cdot)\in C^1[0,\ T]$，则上式可导致

$$\begin{aligned}\varphi(s)&\leqslant\alpha(s)-\int_a^s\alpha(r)\mathrm{d}\left(e^{\int_r^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)\\&=\alpha(s)-\left[\alpha(r)e^{\int_r^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right]_a^s\\&\quad+\int_a^s\alpha'(r)e^{\int_r^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}r\\&=\alpha(a)e^{\int_a^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\\&\quad+\int_a^s\alpha'(r)e^{\int_r^s\beta(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}r.\text{a.e. } s\in[a,\ b].\end{aligned}$$

因此(2.20)得证。

细心的读者也许会发现，上述的不等式与普通常微分方程教程中的 Gronwall 不等式非常相像。唯一不同的是有“a.e.”出现。这实际上也是很自然的。因为有时确实需要处理可测函数的情形。另一点需指出的是，我们没有作任何可积性假设。故引理的结论应理解为只要(2.18)式有意义，则必有(2.19)、(2.20)式。

利用上述的引理，证明下述的结果。

命题 2.6 设 f: $[0, T]\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}^n$ 满足定理 2.4 的条件，则对任何 $t, \hat{t}\in[0, T]$, $x, \hat{x}\in \boldsymbol{R}^n$, 成立

$$\|y_{t,x}(s)\|\leqslant(1+\|x\|)e^{L(s-t)}-1, \ \forall s\in[t, T], \tag{2.22}$$

$$\|y_{t,x}(s)-y_{t,\hat{x}}(s)\|\leqslant\|x-\hat{x}\|e^{L(s-t)}, \ \forall s\in[t, T], \tag{2.23}$$

$$\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant L(1+\|x\|)e^{L(s-t\wedge\hat{t})}|t-\hat{t}|, \quad \forall s\in[t\vee\hat{t}, T]. \tag{2.24}$$

此处，$t\vee\hat{t}=\max\{t, \hat{t}\}$, $t\wedge\hat{t}=\min\{t, \hat{t}\}$。

证 由(2.17)式知

$$y_{t,x}(s)=x+\int_t^s f(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau, \ s\in[t, T], \tag{2.25}$$

因此，由条件(2.6)可得

$$\begin{aligned}\|y_{t,x}(s)\|&\leqslant\|x\|+\int_t^s L(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau,\\&\leqslant\|x\|+L(s-t)+L\int_t^s\|y_{t,x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau,\\&\quad\forall s\in[t, T].\end{aligned}$$

故由引理 2.5 知

$$\begin{aligned}\|y_{t,x}(s)\|&\leqslant\|x\|e^{L(s-t)}+\int_t^s Le^{L(s-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&=\|x\|e^{L(s-t)}+e^{L(s-t)}-1\end{aligned}$$

这便证得(2.22)式。今设 $x, \hat{x}\in \boldsymbol{R}^n$, 则由 $y_{t,x}(\cdot)$ 和 $y_{t,\hat{x}}(\cdot)$ 满足的方程知(注意条件(2.5))

$$\begin{aligned}\|y_{t,x}(s)-y_{t,\hat{x}}(s)\|&\leqslant\|x-\hat{x}\|\\&+L\int_t^s\|y_{t,x}(\tau)-y_{t,\hat{x}}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

因此，利用引理 2.5 知

$$\|y_{t,x}(s)-y_{t,\hat{x}}(s)\|\leqslant\|x-\hat{x}\|e^{L(s-t)},\ \forall s\geqslant t.$$

所以(2.23)式成立。最后，取 $0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T$，则对任何 $s\in[\hat{t},T]$，

$$\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant\int_{\hat{t}}^{s}L\|y_{t,x}(\tau)-y_{\hat{t},x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau+\int_{t}^{\hat{t}}L(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau,$$

利用已证的(2.22)式知

$$\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant\int_{t}^{\hat{t}}L(1+\|x\|)e^{L(\tau-t)}\mathrm{d}\tau+\int_{\hat{t}}^{s}L\|y_{t,x}(\tau)-y_{\hat{t},x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau$$

从而，由引理 2.5 知

$$\begin{aligned}\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|&\leqslant(1+\|x\|)(e^{L(\hat{t}-t)}-1)e^{L(s-\hat{t})}\\&\leqslant(1+\|x\|)L(\hat{t}-t)e^{L(\hat{t}-t)}e^{L(s-\hat{t})}\\&=L(1+\|x\|)e^{L(s-t)}(\hat{t}-t).\end{aligned}$$

所以(2.24)式也成立。

上面的命题说明解 $y_{t,x}(\cdot)$ 是一致有界的，且作为初始时刻 t 及初值状态 x 的函数是局部 Lipschitz 连续的。另外，解 $y_{t,x}(\cdot)$本身的有界性及条件(2.6)蕴含$y_{t,x}(\cdot)\in W^{1,\infty}([t,T];\mathbf{R}^n)$，即 $y_{t,x}(s)$是 s 的 Lipschitz 连续函数。

§3 泛函分析的若干知识

本节将回顾一下有关的泛函分析知识。对于仅关心有限维最优控制问题的读者以及不太熟悉数学的初学者，阅读此书时可以跳过此节。这对于理解本书有限维控制理论部分的大部分结果不会有太大的影响。但是，本节的内容对于理解无限维的控制理论是必需的。

首先回忆一下线性空间的概念。

定义 3.1 设 X 为一个集合，F 为实数或复数全体。我们定义了 X 中元素之间的加法运算以及 F 中数与 X 中元素的数乘运算使得下述条件满足：

Ⅰ. X 关于加法构成一个交换群：对任何 $x, y \in X$，有 $x+y \in X$。这个加法运算满足：

(i)（交换律） $x+y=y+x, \forall x, y \in X$。

(ii)（结合律） $(x+y)+z=x+(y+z), \forall x, y, z \in X$。

(iii)（零元素） 存在 $0 \in X$，使得

$$x+0=0+x=x, \forall x \in X.$$

(iv)（负元素） $\forall x \in X$，存在元素 $-x \in X$，使得

$$x+(-x)=0.$$

Ⅱ. $\forall x \in X$ 及 $\lambda \in F$，有 $\lambda \cdot x \in X$，这个数乘运算满足：

(i)′ $1 \cdot x=x, \forall x \in X$。

(ii)′ $\lambda(\mu x)=(\lambda \mu) x, \forall \lambda, \mu \in F, x \in X$。

(iii)′ $(\lambda+\mu) x=\lambda x+\mu x, \forall \lambda, \mu \in F, x \in X$。

(iv)′ $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \forall \lambda \in F, x, y \in X$。

通常加法和数乘运算称作线性运算。此时，X 称为一个线性空间。

易知，$\boldsymbol{R}^n$ 按向量的加法与数乘构成一个线性空间。这是最典型的有限维线性空间。若记 $\mathscr{P}$ 为所有多项式全体，它按通常的多项式加法及数乘构成一个线性空间。它是一个无限维的线性空间。关于线性空间，一般的线性代数教材中均有详细讨论，感兴趣的读者可以自行参考有关教科书。

人们不难发现，当仅讨论线性空间时，通常并不涉及收敛、连续等概念。这是因为讨论收敛等概念，需要有空间中点与点之间的"靠近"或"远离"的度量方法。这就是需要所谓的

拓扑结构。下面，我们就在线性空间X上引进所谓的范数，从而使得X变为所谓的线性赋范空间。

定义 3.2 设X为一个线性空间，$\|\cdot\|$：$X\to R^+=[0,\infty)$。称$\|\cdot\|$为X上的一个范数，如果$\|\cdot\|$满足下述条件：

1° 正定性：

$$\|x\|\geqslant 0,\ \forall x\in X, \tag{3.1}$$

且

$$\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0. \tag{3.2}$$

2° 正齐次性：

$$\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|,\ \forall\lambda\in F,\ x\in X. \tag{3.3}$$

3° 三角不等式：

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\ \forall x,y\in X. \tag{3.4}$$

此时，X称为线性赋范空间。

有了范数，便可以来定义收敛概念。

定义 3.3 设X为具范数$\|\cdot\|$的线性赋范空间。设$x_k\in X\,(k\geqslant 1)$，我们称序列$\{x_k\}_{k\geqslant 1}$强收敛于$x\in X$，如果

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x\|=0. \tag{3.5}$$

而称$\{x_k\}$为一个 Cauchy 序列，如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists k_0\geqslant 1$，使得当$k、l\geqslant k_0$时

$$\|x_k-x_l\|<\varepsilon. \tag{3.6}$$

我们注意到，对于$X=R^n$，如果定义

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right)^{1/2},\ \forall x=(x^1,\cdots,x^n)\in R^n$$

则容易验证$\|\cdot\|$是一个范数。因此，R^n在这个范数下成为一个线性赋范空间。今若有序列$\{x_k\}_{k\geqslant 1}\subset R^n(x_k=(x_k^1,\cdots x_k^n))$。假设它是 Cauchy 的。则由于

$$|x_k^i-x_l^i|\leqslant|x_k-x_l|,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

故知每个 $\{x_k^i\}_{k\geq1}$ 均为 Cauchy 数列。从而可以找到 $x\in \mathbf{R}^n$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x\|=0.$$

上面这种性质表示了空间 $\mathbf{R}^n$ 的一种较好的"封闭性"。我们将此抽象为空间的完备性。

定义 3.4 设 X 为一线性赋范空间，其范数为 $\|\cdot\|$。称它是完备的，如果对任何 Cauchy 序列 $\{x_k\}_{k\geq1}\subset X$，存在 $x\in X$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x\|=0. \tag{3.7}$$

当线性赋范空间 X 为完备时，我们称之为 Banach 空间。

值得注意的是并非所有线性赋范空间都是完备的。让我们来看一个简单的例子。设 $\mathscr{P}[0,1]$ 为定义于 $[0,1]$ 区间上的所有多项式函数。按通常的函数加法及数乘，$\mathscr{P}[0,1]$ 是一个线性空间。现在定义

$$\|f\|_{C[0,1]}=\max_{t\in[0,1]}|f(t)|,\ \forall f(\cdot)\in\mathscr{P}[0,1].$$

则易知 $\|\cdot\|_{C[0,1]}$ 是一个范数。从而 $\mathscr{P}[0,1]$ 成为一个线性赋范空间。今取

$$f_k(t)=\sum_{i=0}^{k}\frac{t^i}{i!},\ k\geq1.$$

则 $f_k(\cdot)\in\mathscr{P}[0,1]$，$\forall k\geq1$。且有

$$\|f_k-f_l\|_{C[0,1]}\leqslant\sum_{i>k\wedge l}\frac{1}{i!}\to0,$$

此处 $k\wedge l=\min\{k,l\}$。因此，序列 $\{f_k\}$ 是 Cauchy 的。但是，我们又有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(t)=e^t,\ 关于\ t\in[0,1]\ 一致。 \tag{3.8}$$

我们说，$\{f_k\}$ 在 $\mathscr{P}[0,1]$ 中不收敛。事实上，假如 $\{f_k\}$ 在

$\mathscr{P}[0,1]$中收敛于 $f\in\mathscr{P}[0,1]$，则由(3.8)式知必有 $f(t)=e^t$。然而，e^t 不是多项式函数。这便说明了空间 $\mathscr{P}[0,1]$ 中存在 Cauchy 序列不收敛。故 $\mathscr{P}[0,1]$不是完备的。

现在，给出一些常用的 Banach 空间的例子。我们不去验证它们，只是列出空间及其范数。

1° L^p 空间：$1\leqslant p<\infty$，

$$L^p(a,b;\boldsymbol{R}^n)=\{f:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n;f\text{是 }p\text{ 次可积的}\},$$

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_a^b\|f(t)\|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

2° L^∞ 空间：

$$L^\infty(a,b;\boldsymbol{R}^n)=\{f:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n;f\text{ 本性有界}\},$$

$$\|f\|_{L^\infty}=\inf_{\substack{\mu(E)=0\\E\subset[a,b]}}\sup_{E}\|f(t)\|.$$

(以上两个空间在 §1 中已经见过)

3° C 空间：

$$C([a,b];\boldsymbol{R}^n)=\{f:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n;f\text{ 是连续的}\},$$

$$\|f\|_C=\max_{t\in[a,b]}\|f(t)\|.$$

4° AC 空间：

$$W^{1,1}([a,b];\boldsymbol{R}^n)=\{f:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n;f\text{ 是绝对连续的}\},$$

$$\|f\|_{W^{1,1}}=\int_a^b\|f(t)\|\mathrm{d}t+\int_a^b\|f'(t)\|\mathrm{d}t.$$

5° $W^{1,\infty}$ 空间：

$$W^{1,\infty}([a,b];\boldsymbol{R}^n)=\{f:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n;\ f\text{ 是 Lipschitz 连续的}\},$$

$$\|f\|_{W^{1,\infty}}=\|f\|_{L^\infty}+\|f'\|_{L^\infty}.$$

6° C^m 空间：

$C^m([a,b];\boldsymbol{R}^n)=\{f:\ [a,b]\to\boldsymbol{R}^n;\ f$ 是m次连续可微

的},

$$\|f\|_{C^m}=\sum_{i=1}^{m}\|f^{(i)}\|_C$$

7° V 空间。

$V([a,b];\mathbf{R}^n)=\{f:[a,b]\to\mathbf{R}^n;\ f$ 是有界变差的$\}$,

$$\|f\|_V=|f(a)|+\bigvee_a^b(f).$$

此处, $\bigvee_a^b(f)$称为 f 在$[a,b]$上的全变差,其定义如下:设

$$D:a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b,$$

则

$$\bigvee_a^b(f)=\sup_D\sum_{i=1}^{k}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|.$$

此处的上确界取遍所有可能的区间分割 D。

8° l^p 空间:

$$l^p=\left\{a=(a_i)_{i=1}^{\infty};\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p<\infty\right\},\ 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|a\|_{l^p}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p}.$$

$$l^\infty=\left\{a=(a_i)_{i=1}^{\infty};\sup_i|a_i|<\infty\right\},$$

$$\|a\|_{l^\infty}=\sup_i|a_i|.$$

有兴趣的读者可以自行完成上述空间的范数及完备性的验证或参考有关教科书,进一步了解这些空间。

在泛函分析中,一个很重要的研究对象是线性算子。下面,我们介绍一下这方面的一些结果。

定义 3.5 设 F 为实数或复数全体, X 和 Y 为 F 上的两个线性空间, D 为 X 的一个线性子空间,而 $A:D\to Y$ 是一个映照。记 Ax 为元素 $x\in D$ 在映照 A 下的象。称 A 为线性算子,

如果对任何 $x, y\in \boldsymbol{D}$, $\alpha, \beta\in F$，有

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay. \tag{3.9}$$

我们称 D 为 A 的定义域，常记作 $\mathscr{D}(A)$，而称

$$\mathscr{R}(A)=\{Ax; x\in \boldsymbol{D}\}$$

为 A 的值域。当 $Y=\boldsymbol{R}$(实数全体)或 $\boldsymbol{C}$(复数全体)时，称 A 为实或复线性泛函。

假设 X 和 Y 为 Banach 空间，$A: X\to Y$ 为线性算子，$\mathscr{D}(A)=X$。由于空间已有拓扑结构，可以讨论线性算子 A 的连续性了。有下面的命题。

命题 3.6 设 $A: X\to Y$。则下述命题等价：

1° A 是连续的。

2° A 将 X 中的有界集映成 Y 中的有界集。

3° 存在常数 $M\geqslant 0$，使得

$$\|Ax\|\leqslant M\|x\|, \ \forall x\in X. \tag{3.10}$$

通常称满足上述 2° 的算子为线性有界算子。因此，上述命题意味着线性连续算子与线性有界算子是等价的。类似地，将不区分线性连续泛函与线性有界泛函。

定义 3.7 设 $A: X\to Y$ 为线性有界泛函，定义

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{3.11}$$

称 $\|A\|$ 为算子 A 的范数。当 A 为泛函时，上面式子定义了泛函的范数。

对于经典的算子理论，下面三个定理是十分重要的。

定理 3.8 (逆算子定理) 设 X 和 Y 均为 Banach 空间，$A: X\to Y$ 是线性有界算子，且 A 是一一到上的，即

$$\begin{cases} Ax=0\Longrightarrow x=0, \\ \mathscr{R}(A)=Y, \end{cases} \tag{3.12}$$

则 A^{-1} 必存在且也是线性有界算子。

定理 3.9 （闭图象定理） 设 X 和 Y 为 Banach 空间，$A: X \to Y$ 是线性算子，且其图象

$$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$$

是 $X \times Y$ 中的闭集，则 A 必是连续的。

定理 3.10 （共鸣定理） 设 X 为 Banach 空间，Y 是线性赋范空间，$\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是一族 X 到 Y 的线性有界算子，满足下述条件：对任何固定的 $x \in X$，

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda x\| < \infty, \tag{3.13}$$

则

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda\| < \infty. \tag{3.14}$$

下面，讨论一下作为线性算子特例的线性泛函的一些进一步的结果。

首先，设 X 为 Banach 空间，而令

$$X^* = \{f: X \to F: f \text{ 是线性有界泛函}\}. \tag{3.15}$$

然后，规定线性运算为：$\forall \alpha, \beta \in F$，$f, g \in X^*$，定义

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \quad \forall x \in X. \tag{3.16}$$

由于 f 和 g 为线性有界泛函，可知 $\alpha f + \beta g \in X^*$。从而，$X^*$ 也是一个线性空间。同时，对任何 $f \in X^*$，

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{3.17}$$

是一个 X^* 上的范数。并且，X^* 在此范数下是完备的。因此，X^* 也是一个 Banach 空间。称此空间为 X 的共轭空间。

在实际应用中，人们希望得到具体的 Banach 空间的共轭空间的表示。例如对于 Banach 空间 $L^p([a, b]; \mathbf{R}^n)$，它的共轭空间到底是什么样子。弄清楚这一点，也就可以将该空

间上一般的线性连续泛函具体写出来。将共轭空间表示出来的结果一般统称为 Riesz 表现定理。下面，将一些常用的 Banach 空间的共轭空间列出来。这里不作证明。

1° $L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n), 1 \leqslant p < \infty$。

设 q 为 p 的共轭数，即 $q \in [1, \infty]$，使得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ 或 } q = \frac{p}{p-1}.$$

则有

$$L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)^* = L^q(a, b; \boldsymbol{R}^n). \tag{3.18}$$

上式的意思是：对任何 $f \in L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)^*$，存在唯一的 $y(\cdot; f) \in L^q(a, b; \boldsymbol{R}^n)$，使得

$$f(x(\cdot)) = \int_a^b (x(t), y(t; f))\mathrm{d}t,$$
$$\forall x(\cdot) \in L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n). \tag{3.19}$$

且

$$\|f\| = \left(\int_a^b \|y(t; f)\|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}. \tag{3.20}$$

由定理 1.12 知，(3.19)式的右端是有意义的。

2° $l^p, 1 \leqslant p < \infty$。

仍设 q 为 p 的共轭数，则有

$$(l^p)^* = l^q. \tag{3.21}$$

即对任何 $f \in l^p$，存在唯一的 $(f_i)_{i \geqslant 1} \in l^q$，使得

$$f(x) = \sum_{i \geqslant 1} f_i x_i, \ \forall x = (x_i)_{i \geqslant 1} \in l^p. \tag{3.22}$$

且

$$\|f\| = \left(\sum_{i \geqslant 1} |f_i|^q\right)^{1/q}. \tag{3.23}$$

值得注意的是

$$\begin{cases} L^\infty(a, b; \boldsymbol{R}^n)^* \neq L^1(a, b; \boldsymbol{R}^n), \\ (l^\infty)^* \neq l^1. \end{cases} \tag{3.24}$$

3° $C([a, b]; \boldsymbol{R}^n)$。(初学者可以跳过此表示定理)。设(见本节中 Banach 空间的例 7°)

$$V_0([a, b]; \boldsymbol{R}^n) = \{f \in V([a, b]; \boldsymbol{R}^n):\ f(a)=0,\ f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上右连续}\},$$

则可以证明对于任何 $f \in V_0([a, b]; \boldsymbol{R}^n)$,由 f 可以导出 $\mathscr{B}[a, b]$ 上的一个正则广义测度,记作 $\mathrm{d}f$,它取值于 $\boldsymbol{R}^n$。于是,我们有

$$C([a, b]; \boldsymbol{R}^n)^* = V_0([a, b]; \boldsymbol{R}^n). \tag{3.25}$$

其意义如下:对任何的 $f \in C([a, b]; \boldsymbol{R}^n)^*$,存在 $V_0([a, b]; \boldsymbol{R}^n)$ 中的唯一的元素,仍记作 f,使得

$$\begin{aligned} f(x(\cdot)) &= \int_a^b (x(t), \mathrm{d}f(t)) \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \int_a^b x_i(t)\mathrm{d}f_i(t). \end{aligned} \tag{3.26}$$

上式中和式里每一项均是所谓的 Lebesgue-Stieltjes 积分。

决定给定的 Banach 空间的共轭空间是一件很困难的事情。仅列出上述三种情况。另外一些较为复杂的情形就不在此叙述了。

下面的定理讲的是有界线性泛函的保范延拓,它也是泛函分析中的一个重要定理。

定理 3.11 (Hahn-Banach) 设 X 为线性赋范空间,X_0 为 X 的一个线性子空间。设 f 是 X_0 上的一个线性有界泛函。则存在 X 上的线性有界泛函 $\hat{f}$,使得

$$\begin{cases} \hat{f}(x) = f(x),\ \forall x \in X_0, \\ \|\hat{f}\| = \|f\|. \end{cases} \tag{3.27}$$

上面的定理相当有用。作为一个例子,我们来说明这样一个事实,即在线性赋范空间 X 上有足够多的线性有界泛函。

这个"足够多"可以下述方式表述。

命题 3.12 设X为一个线性赋范空间，则对任何$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，必存在一个线性有界泛函$f \in X^*$，使得

$$f(x_1) \neq f(x_2). \tag{3.28}$$

证 记$x_0 = x_1 - x_2$。令X_0为由x_0张成的一维子空间，定义

$$f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|, \ \forall \lambda \in F. \tag{3.29}$$

则易知，f是X_0上的一个线性有界泛函。由 Hahn-Banach 定理，可将f保范延拓到X上，仍记作f。从而，$f \in X^*$，使得

$$f(x_0) = \|x_0\| = \|x_1 - x_2\| \neq 0, \tag{3.30}$$

由此，立即可得(3.28)。

现在，再回到X上的收敛概念上来。注意到在定义3.3中，定义了X中序列的强收敛性。自然，言下之意应该还有弱收敛性。下面，就来引进这一概念。

定义 3.12 设X为一个线性赋范空间，设$\{x_k\}_{k \geq 1}$为X中的一个序列。称x_n弱收敛于$x \in X$，如果

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x), \ \forall f \in X^*. \tag{3.31}$$

我们注意到，若x_n强收敛于x，则由于

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\| \|x_n - x\|, \ \forall f \in X^*.$$

故x_n必弱收敛于x。反之，一般不对。最简单的例子是l^2中的如下序列：

$$x_k = (0, 0 \cdots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \cdots\cdots), \ k \geq 1.$$

显然，对任何$k \neq l$，

$$\|x_k - x_l\| = \sqrt{2}.$$

因此，$\{x_k\}_{k\geq1}$ 必不强收敛。然而，对于任何 $f\in(l^2)^*=l^2$（此处，用到了 Riesz 表现定理）。可设 $(f_i)_{i\geq1}\in l^2$，使得

$$f(x_k)=f_k,\ k\geqslant1。$$

由于 $\sum_{i\geq1}|f_i|^2<\infty$，因此

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=0,\ \forall f\in(l^2)^*。$$

这就说明了序列 $\{x_k\}$ 弱收敛而非强收敛。

值得注意的是在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，也可以定义弱收敛。但是，容易证明，此时，强收敛与弱收敛是等价的。由于在无限维空间中强收敛与弱收敛不等价，因此，给泛函分析带来了许多值得研究的问题。

再来看另一种情况。设 X 为线性赋范空间，X^* 为 X 的共轭空间。则 X^* 本身也是一个 Banach 空间。因此，也可定义它的共轭空间 $(X^*)^*$。称之为 X 的二次共轭空间，简记为 X^{**}。于是，在 X^* 中，可以有强收敛与弱收敛概念。另一方面，还有一个更弱的收敛概念，叫做弱 * 收敛。其定义如下。

定义 3.13 设 X^* 为线性赋范空间 X 的共轭空间。设 $\{f_k\}$ 为 X^* 中的一个序列，则称 f_k 弱 * 收敛于 f，如果

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\ \forall x\in X。\tag{3.32}$$

我们注意到，对任何 $x\in X$，若定义

$$x^{**}(f)=f(x),\ \forall f\in X^*。\tag{3.33}$$

则易知，$x^{**}\in X^{**}$。也就是说，$x\in X$ 可以视作 X^{**} 中的元素。即有

$$X\subset X^{**}。\tag{3.34}$$

已知 f_k 弱收敛于 f 是要求所有 X^{**} 中泛函作用后收敛，而定义 3.13 中仅要求 X^{**} 中的一部分泛函，即对应于 X 中元

素的泛函作用后收敛。因此，弱*收敛的概念要比弱收敛的概念更弱。

在有限维空间中，比如 $\boldsymbol{R}^n$，任何有界闭集必是紧集。但是，在无限维线性赋范空间中，有界闭集未必是紧的。特别地，可以证明，在无限维 Banach 空间中，单位闭球一定不是紧的。这里所涉及的闭性都是指强收敛而言的。我们常将其称作强拓扑。类似地，在 X 中还有弱拓扑，而在 X^* 中，有三种拓扑，强拓扑、弱拓扑和弱 *-拓扑。下面的定理是很深刻的。

定理 3.14 设 X 为线性赋范空间，X^* 为其共轭空间。则 X^* 中任何按范数有界的弱 *-闭集按弱 *-拓扑必是紧的。特别地，X^* 中的单位闭球是弱 *-紧的。

我们注意到，对于 $X=l^p$，$1<p<\infty$，有

$$X^{**}=X. \tag{3.35}$$

这样的空间称为自反空间。除了 $l^p(1<p<\infty)$ 外，$L^p(a, b; \boldsymbol{R}^n)(1<p<\infty)$ 也是自反 Banach 空间。立即可以看到，在自反空间里，弱拓扑与弱 *-拓扑是等价的。

进一步，若 $X=l^2$，则还有

$$X^*=X. \tag{3.36}$$

这空间具有更特殊的结构。现在就讨论一下这样的空间。

定义 3.15 设 F 为实数或复数全体，设 H 为 F 上线性空间。对于任何 $x, y\in H$，我们有一个数记作 $(x, y)\in F$ 与之对应。这个二元运算满足下述条件：

(i) 共轭对称性：

$$(x, y)=\overline{(y, x)}, \ \forall x, y\in H, \tag{3.37}$$

(ii) 对第一变元的线性：

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z),\ \forall\alpha,\beta\in F,x,y,z\in H. \tag{3.38}$$

(iii) 正定性：

$$\begin{cases}(x,x)\geqslant 0,\ \forall x\in H,\\(x,x)=0\Longleftrightarrow x=0.\end{cases} \tag{3.39}$$

此时，称 $(\cdot,\cdot)$ 为 H 中的一个内积，而 H 称为一个内积空间。

容易知道，若令

$$\|x\|=(x,x)^{1/2},\ \forall x\in H. \tag{3.40}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数。从而，内积空间可以自然地成为线性赋范空间。进一步，若 H 关于此范数完备，则称 H 为 Hilbert 空间。对于 Hilbert 空间 H，有 $H^*=H$。

下面给出一些熟知的 Hilbert 空间的例子。

1° $\mathbf{R}^n$，其内积为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

$$\forall x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n.$$

2° $L^2(a,b;\mathbf{R}^n)$，其内积为

$$(x(\cdot),y(\cdot))=\int_a^b(x(t),y(t))\mathrm{d}t.$$

3° l^2，其内积为

$$(x,y)=\sum_{i\geqslant 1}x_iy_i,\ \forall x=(x_i)_{i\geqslant 1},y=(y_i)_{i\geqslant 1}\in l^2.$$

我们还会遇到一些其它的 Hilbert 空间，届时，再作介绍。

下面，再介绍一下共轭算子的概念。

定义 3.16 设 X 和 Y 为线性赋范空间，$A:X\to Y$ 为线性有界算子。设 $A^*:Y^*\to X^*$ 为另一线性有界算子，使得

$$(A^*h)(x)=h(Ax),\ \forall h\in Y^*,x\in X. \tag{3.41}$$

则称 A^* 为 A 的共轭算子。

命题 3.17 设X和Y为线性赋范空间，则

(i) 对每个线性有界算子$A:X\to Y$，存在唯一的共轭算子$A^*:Y^*\to X^*$，且使$\|A^*\|=\|A\|$。

(ii) 若记I_X和I_{X^*}分别为X和X^*上的恒等算子，则

$$I_X^*=I_{X^*}. \tag{3.42}$$

(iii) 若Z为另一线性赋范空间，$B:Y\to Z$线性有界，则

$$(BA)^*=A^*B^*. \tag{3.43}$$

今若考虑$A:H\to H$，而H为Hilbert空间。由Riesz表现定理，我们视H与H^*等同，即$H=H^*$。因此，有$A^*:H\to H$。此时，若有

$$A^*=A, \tag{3.44}$$

则称A为自共轭算子。这样的算子有许多好的性质，有兴趣的读者可阅读有关泛函分析的教科书。

最后，提一下非线性泛函的一些概念。设X为一个Banach空间，D为X中的一个开子集。令$f:D\to \mathbf{R}$，则f就是一个一般的非线性泛函(定义于D)。我们称f在点$x_0\in D$是Fréchet可导的，如果存在$g\in X^*$，使得

$$\lim_{\lambda\to 0}\sup_{\|y\|<1}\left|\frac{f(x_0+\lambda y)-f(x_0)}{\lambda}-\langle g,y\rangle\right|=0. \tag{3.45}$$

常记$g=Df(x_0)$，称之为f在x_0点的Fréchet导数。若f在D上的任一点x都Fréchet可导且$x\mapsto Df(x)$是连续的，则称f是在D上C^1的。

另外，当$X=\mathbf{R}^n$时，若D为有界闭集，f在D上连续，则f必在D上一致连续。但是，当$\dim X=\infty$时，这样的结果一般不对。因此，有时我们称$f:D\to\mathbf{R}$是局部一致连续的，如果f在D的每个有界子集上是一致连续的。必须注意，在无限维空间中，有界闭集上的连续函数和一致连续函数是不

等价的。

§4 算子半群与发展方程

在上一节的基础上，本节将介绍所谓的 C_0 类算子半群以及将要研究的无限维受控系统的基础——抽象发展方程。

首先，简要地介绍一下向量值函数的 Bochner 积分。为此，先引入下面的定义。

定义 4.1 设 X 为一个 Banach 空间，$x:[a,b]\to X$ 为一映照，称 $x(\cdot)$ 是在 $[a,b]$ 上弱可测的，如果对任何 $f\in X^*$，$f(x(\cdot))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数。而称 $x(\cdot)$ 为强可测的，如果存在一列简单函数

$$x_k(t)=\sum_{i=1}^{m_k}a_k^i\chi_{E_k^i}(t),\ t\in[a,b],$$

其中 $a_k^i\in X$，$E_k^i\in\mathscr{L}[a,b]$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\|x(t)-x_k(t)\|=0,\ \text{a.e.}\ t\in[a,b]. \qquad (4.1)$$

另外，称 $x(\cdot)$ 是几乎可分值的，如果存在一个零测集 $E\subset[a,b]$，使得集合

$$\{x(t): t\in[a,b]\setminus E\}$$

是可分的(即可找到稠密的可列子集)。

关于强、弱可测性，易知，强可测必弱可测。有趣的是，有下述的定理。

定理 4.2 (Pettis) $x(\cdot)$ 是强可测的充要条件是 $x(\cdot)$ 是弱可测的，且是几乎可分值的。特别，当 X 本身为可分时，强弱可测性是等价的。

现在，引入 Bochner 积分。首先，对于简单函数

$$x(t)=\sum_{i=1}^{m}a_i\chi_{E_i}(t),\ t\in[0,\ T],$$

可很自然地定义

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{m}a_i\mu(E_i),\tag{4.2}$$

此处，$\mu(\cdot)$为 Lebesgue 测度。对于一般的向量值函数，有下述的定义。

定义 4.3 函数 $x(\cdot)$: $[a,\ b]\to X$ 称为是 Bochner 可积的，如果存在一列简单函数 $x_k(\cdot)$: $[a,\ b]\to X$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k(t)-x(t)\|=0,\ \text{a.e.}\, t\in[0,\ T],\tag{4.3}$$

且

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b\|x_k(t)-x(t)\|\mathrm{d}t=0.\tag{4.4}$$

此时，定义

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\lim_{k\to\infty}\int_a^b x_k(t)\mathrm{d}t.\tag{4.5}$$

尽管对于给定的$x(\cdot)$，所对应的$\{x_k(\cdot)\}_{k\geq 1}$不是唯一的，但是容易证明上述定义是合理的。下面结果给出了 Bochner 可积性的简单判别法。

定理 4.4 设 $x(\cdot)$是强可测的，则 $x(\cdot)$是 Bochner 可积的充要条件是$\|x(\cdot)\|$是 Lebesgue 可积的。

Bochner 积分的性质与 $\boldsymbol{R}^n$——值函数的积分的性质非常类似。唯一不同的是，绝对连续函数未必成立牛顿——莱布尼兹公式。这一点是必须注意的。

下面讨论 C_0 类算子半群。

定义 4.5 设X为 Banach 空间。单参数的线性有界算子族 $T(t)$: $X\to X$，$t\in[0,\ \infty)$，称为是X上的一个强连续算子半群，如果

(i) $T(0)=I\equiv X$ 上的恒等映照，

(ii) $T(t+s)=T(t)T(s)$，$\forall t, s\geqslant 0$，(半群性)

(iii) $\lim\limits_{t\to 0}\|T(t)x-x\|=0$，$\forall x\in X$。(强连续性)

这样的算子半群也简称为 C_0 类算子半群。

对于 C_0 类算子半群 $T(t)$，定义

$$\begin{cases}\mathscr{D}(A)=\left\{x\in X;\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{T(t)x-x}{t}\text{存在}\right\}, \\ Ax=\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{T(t)x-x}{t}=\dfrac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}T(t)x\big|_{t=0}, \forall x\in\mathscr{D}(A).\end{cases} \tag{4.6}$$

我们称 A 为 $T(t)$ 的生成元。

下面给出一些 C_0 类算子半群 $T(t)$ 的一些性质。

定理 4.6 设 $T(t)$ 为 Banach 空间 X 上的 C_0 类算子半群，A 为其生成元。则下述结论成立：

1° 存在常数 $\omega\in\mathbf{R}$，$M\geqslant 1$，使得

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}, \forall t\in[0, \infty), \tag{4.7}$$

2° 对任何 $x\in X$，函数 $t\mapsto T(t)x$ 是在 $[0, \infty)$ 上连续的。

3° 对任何 $x\in X$，有

$$\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\in\mathscr{D}(A), \forall t\in[0, \infty), \tag{4.8}$$

且

$$A\left(\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right)=T(t)x-x. \tag{4.9}$$

4° 对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$，有

$$T(t)x\in\mathscr{D}(A), \forall t\in[0, \infty), \tag{4.10}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{4.11}$$

5° 若 $\mathscr{D}(A^n)$ 为 A^n 的定义域，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{D}(A^n)$ 在 X 中稠密，即

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{D}(A^n)} = X. \tag{4.12}$$

且 A 是一个闭算子，即 A 的图象

$$G(A) = \{(x, Ax); x\in\mathscr{D}(A)\}$$

在 $X\times X$ 中是闭的。

6° 若 $S(t)$ 为另一个 C_0 类算子半群，其生成元也是 A，则必有

$$S(t) = T(t),\ \forall t\in[0, \infty). \tag{4.13}$$

证 1° 我们先说明存在 $\eta>0$，使得对某 $M\geqslant 1$，

$$\|T(t)\|\leqslant M,\ \forall t\in[0, \eta]. \tag{4.14}$$

若上式不成立，则可找到 $t_n\downarrow 0$，使得

$$\|T(t_n)\|\geqslant n. \tag{4.15}$$

但另一方面，由于 $T(t)$ 是在 0 点强连续的，即定义 4.5 中的条件(iii)成立，故知

$$\sup_n\|T(t_n)x\|<\infty,\ \forall x\in X. \tag{4.16}$$

从而由共鸣定理(即定理 3.10)，可得

$$\sup_n\|T(t_n)\|<\infty.$$

这与(4.15)式矛盾。因此，可找到 $\eta>0$ 及 $M\geqslant 1$ 使得(4.14)式成立。令置

$$\omega = \eta^{-1}\log M. \tag{4.17}$$

则对任何 $t\geqslant 0$，总有

$$t = n\eta+\delta,\ 0\leqslant\delta<\eta. \tag{4.18}$$

从而，由 $T(t)$ 的半群性（即定义 4.5 中条件(ii)）知

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leqslant M^{n+1}$$
$$\leqslant M \cdot M^{t/\eta} = Me^{\omega t}.$$

2° 设 $t, h \geqslant 0$。则有

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leqslant \|T(t)\| \|T(h)x - x\|$$
$$\leqslant Me^{\omega t}\|T(h)x - x\|.$$

又若 $t \geqslant h \geqslant 0$，则

$$\|T(t-h)t - T(t)x\| \leqslant \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\|$$
$$\leqslant Me^{\omega t}\|x - T(h)x\|,$$

故 $t \to T(t)x$ 是连续的。

3° 对于 $x \in X$，$h > 0$，有

$$\frac{T(h) - I}{h}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^t [T(s+h)x - T(s)x]\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\mathrm{d}s.$$

由已证得的 2° 可知上式右端当 $h \to 0$ 时趋于 $T(t)x - x$。这便证得了 3°。

4° 对于 $x \in \mathscr{D}(A)$，$h > 0$，有

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x$$
$$= T(t)\left(\frac{T(h) - I}{h}\right)x \to T(t)Ax, \ (h \downarrow 0). \tag{4.19}$$

因此，$T(t)x \in \mathscr{D}(A)$，且

$$AT(t)x = T(t)Ax.$$

而(4.19)又意味着

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

所以尚需证明 $T(t)x$ 的左导数存在，且也等于 $T(t)Ax$。事实上，对 $t>0$，

$$\lim_{h\downarrow 0}\left[\frac{T(t)x-T(t-h)x}{h}-T(t)Ax\right]$$
$$=\lim_{h\downarrow 0} T(t-h)\left[\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right]$$
$$+\lim_{h\downarrow 0}[T(t-h)Ax-T(t)Ax]=0.$$

故得证 4°。

5° 设 $C_0^\infty(0,\infty)$ 为全体无限次可微具有紧支集的函数。对任何 $\varphi\in C_0^\infty(0,\infty)$，令

$$y=x(\varphi)=\int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s.$$

则对于 $h>0$，有

$$\frac{T(h)-I}{h}y=\frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h)x-T(s)x]\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{h}[\varphi(s-h)-\varphi(s)]T(s)x\mathrm{d}s$$
$$\to\int_0^\infty -\varphi'(s)T(s)x\mathrm{d}s \qquad (h\downarrow 0),$$

因此，由定义，$y\in\mathscr{D}(A)$，且

$$Ay=-\int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x\mathrm{d}s.$$

易知，若 $\varphi\in C_0^\infty(0,\infty)$，则 $\varphi^{(n)}\in C_0^\infty(0,\infty)$。因此，由上面类似的方法，可以证明 $y\in\mathscr{D}(A^n)$，且

$$A^ny=(-1)^n\int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)T(s)x\mathrm{d}s,\ n=1,2,\cdots \quad (4.20)$$

故有

$$y\in\bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{D}(A^n).$$

令

$$Y=\{x(\varphi);x\in X,\ \varphi\in C_0^\infty(0,\infty)\},$$

则易知Y是一个线性子空间，且

$$Y\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{D}(A^n).$$

因此，若能证明Y在X中稠密，则就得证 (4.12) 式。为此，用反证法。假如Y不在X中稠密，即$\overline{Y}\neq X$。则由 Hahn-Banach 定理，可以找到一个$x^*\in X^*$，使得$x^*\neq 0$，

$$x^*(y)=0,\ \forall y\in Y.$$

由此立即可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\varphi(s)x^*(T(s)x)\mathrm{d}s\\&=x^*\left(\int_0^\infty\varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s\right)=0,\\&\forall x\in X,\ \varphi(\cdot)\in C_0^\infty(0,\infty).\end{aligned}\tag{4.21}$$

于是，可知，连续函数$x^*(T(s)x)$必恒为 0，即

$$x^*(T(s)x)=0,\ \forall s\in[0,\infty).$$

特别地，

$$x^*(x)=x^*(T(0)x)=0,\ \forall x\in X.$$

由泛函为 0 的定义即知，$x^*=0$。这是一个矛盾。因此，(4.12)式必成立。现在再证A是闭算子。设$x_n\in\mathscr{D}(A)$，满足

$$x_n\to x,\ Ax_n\to y,\ (n\to\infty).$$

则由已证的 3° 或 4° 知，

$$T(t)x_n-x_n=\int_0^t T(s)Ax_n\mathrm{d}s,\ n\geqslant 1,\ t\geqslant 0.$$

令$n\to\infty$，立即有

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)y\mathrm{d}s,$$

然后两边除以$t>0$，再令$t\downarrow 0$，可知

$$Ax=y.$$

因此，A 的图象是闭的，故 A 为闭算子。

6° 今设 $S(t)$ 为另一算子半群，其生成元也为 A。则对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$，由已证的 4° 可知 $s\mapsto T(t-s)S(s)x$ 是可微的。从而，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T(t-s)S(s)x=-AT(t-s)S(s)x$$
$$+T(t-s)AS(s)x=-T(t-s)AS(s)x$$
$$+T(t-s)AS(s)x=0.$$

因此，$s\mapsto T(t-s)S(s)x$ 是一个常值向量。特别地，该函数在 $s=0$ 和 $s=t$ 处的值相等，即

$$T(t)x=S(t)x,\ \forall t\geqslant 0,\ x\in\mathscr{D}(A).$$

再由已证的 5° 知，上式对所有的 $x\in X$ 均成立。故知 $T(t)=S(t)$。得证 6°。

在算子半群理论中，下述的 Hille-Yosida 定理是最重要的定理之一。

定理 4.7 (Hille–Yosida) 设 X 为 Banach 空间，$A:\mathscr{D}(A)\subset X\to X$ 为一线性算子，$T(t)$ 为 X 上的一个 C_0 类算子半群，满足条件

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t},\ t\geqslant 0\ (M\geqslant 1,\ \omega\in\boldsymbol{R}). \tag{4.22}$$

则 A 为 $T(t)$ 的生成元当且仅当下述两个条件成立：

(i) A 是闭算子且 $\mathscr{D}(A)$ 在 X 中稠密（这样的算子称为稠定闭算子）。

(ii) 对任何 $\lambda\in(\omega,\infty)$，$R(\lambda;A)\equiv(\lambda I-A)^{-1}$ 存在，且为线性有界算子，满足

$$\|R(\lambda;A)^n\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},\ \forall\lambda>\omega,\ n\geqslant 1. \tag{4.23}$$

证 必要性。设 A 为 $T(t)$ 的生成元，则由定理 4.6 的

5° 知道A是稠定闭算子，故(i)成立。再证(ii)。为此，定义

$$R(\lambda)x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,\ \lambda>\omega,\ x\in X. \tag{4.24}$$

由条件(4.22)知，上述积分是存在的。对于$h>0$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x&=\frac{1}{h}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}[T(t+h)x-T(t)x]\mathrm{d}t\\&=\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t\\&\quad-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h}e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t\\&\to\lambda R(\lambda)x-x,\ (h\to 0).\end{aligned} \tag{4.25}$$

因此，$R(\lambda)x\in\mathscr{D}(A)$，且

$$AR(\lambda)x=\lambda R(\lambda)x-x,\ \forall x\in X$$

或

$$(\lambda I-A)R(\lambda)=I. \tag{4.26}$$

另一方面，对于$x\in\mathscr{D}(A)$，又有

$$\begin{aligned}R(\lambda)Ax&=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)Ax\mathrm{d}t\\&=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}e^{-\lambda t}AT(t)x\mathrm{d}t\\&=A\left[\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t\right]=AR(\lambda)x.\end{aligned} \tag{4.27}$$

此处，已经用到A的闭性。因此，结合(4.26)和(4.27)式，可得到

$$R(\lambda)(\lambda I-A)x=x,\ \forall x\in\mathscr{D}(A). \tag{4.28}$$

故由$R(\lambda;A)=(\lambda I-A)^{-1}$的定义知，

$$R(\lambda)=R(\lambda;A),\ \forall\lambda>\omega. \tag{4.29}$$

由(4.24)式，用归纳法可以验证

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}R(\lambda)x=(-1)^n\int_0^{\infty}t^ne^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,\ n\geqslant 0. \tag{4.30}$$

同时，也可验证

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)=(-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1},\ n\geqslant 0. \tag{4.31}$$

因此，由(4.29)～(4.31)得到

$$R(\lambda;A)^n x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,\ n\geqslant 1,\ x\in X. \tag{4.32}$$

从而，

$$\begin{aligned}\|R(\lambda;A)^n\| &\leqslant \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{(\omega-\lambda)t}\mathrm{d}t\\ &=\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},\ n\geqslant 1.\end{aligned}$$

这便得证(ii)。

充分性：对于 A，定义下述所谓的 Yosida 逼近：

$$A_\lambda=\lambda AR(\lambda;A)=\lambda^2R(\lambda;A)-\lambda I,\ \lambda>\omega. \tag{4.33}$$

则 A_λ 为 X 上的线性有界算子。首先说明以下事实，

$$\lim_{\lambda\to\infty}A_\lambda x=Ax,\ \forall x\in\mathscr{D}(A). \tag{4.34}$$

实际上，对于 $x\in\mathscr{D}(A)$，由(4.23)，

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda;A)x-x\| &=\|AR(\lambda;A)x\|\\ &=\|R(\lambda;A)Ax\|\leqslant\frac{M}{\lambda-\omega}\|Ax\|\to 0\\ &\qquad (\lambda\to\infty).\end{aligned}$$

而 $\mathscr{D}(A)$ 在 X 中稠。因此，注意到

$$\|\lambda R(\lambda;A)\|\leqslant\frac{M\lambda}{\lambda-\omega}\to M \qquad (\lambda\to\infty),$$

可知

$$\lambda R(\lambda;A)x\to x,\ \forall x\in X \qquad (\lambda\to\infty). \tag{4.35}$$

从而，$\forall x\in\mathscr{D}(A)$，注意 $Ax\in X$，故由(4.35)知

$$\|A_\lambda x - Ax\| = \|\lambda AR(\lambda; A)x - Ax\|$$
$$= \|\lambda R(\lambda; A)Ax - Ax\| \to 0.$$

因此,(4.34)成立。现在,对每个固定的 $\lambda > \omega$, 定义

$$e^{A_\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_\lambda^n t^n}{n!}, \ t \geq 0. \tag{4.36}$$

由于 A_λ 是线性有界算子, 故上式的级数是收敛的。于是,完全类似于指数函数幂级数展开的有关结论, 我们可以验证 $e^{A_\lambda t}$ 是 X 上的一个 C_0 类算子半群,具有生成元 A_λ, 且$\mathscr{D}(A_\lambda) = X$。注意到

$$\|e^{A_\lambda t}\| = \|e^{-\lambda t + \lambda^2 R(\lambda; A)t}\|$$
$$= e^{-\lambda t} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} R(\lambda; A)^n t^n}{n!} \right\|$$
$$\leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} \dfrac{M}{(\lambda - \omega)^n} t^n}{n!} \tag{4.37}$$
$$= M e^{\left(-\lambda + \frac{\lambda^2}{\lambda - \omega}\right)t}$$
$$= M e^{\frac{\lambda}{\lambda - \omega} \omega t} \to M e^{\omega t}, \qquad (\lambda \to \infty).$$

又,对于 $\lambda, \mu > \omega$, A_λ, A_μ 和 $e^{A_\lambda t}$, $e^{A_\mu t}$ 之间均是可以互相交换的。因此,

$$\|e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x\| = \left\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(e^{A_\lambda ts} e^{A_\mu t(1-s)} x\right) \mathrm{d}s \right\|$$
$$\leq \int_0^1 t \| e^{A_\lambda ts} e^{A_\mu t(1-s)} (A_\lambda x - A_\mu x) \| \mathrm{d}s$$
$$\leq t M^2 \int_0^1 e^{\frac{\lambda}{\lambda - \omega} \omega ts + \frac{\mu}{\mu - \omega} \omega t(1-s)} \mathrm{d}s$$
$$\cdot \|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$
$$\leq Ct \|A_\lambda x - A_\mu x\|, \ \forall \lambda, \mu \geq 2\omega, \ t \geq 0.$$

此处,C 为一个绝对常数。于是,$\forall x \in \mathscr{D}(A)$,由上式及(4.34)

式知：$\{e^{A_\lambda t}x: \lambda>\omega\}$ 在任何 $C([0, t_0]; X)$ 上 Cauchy。从而，再注意到 $\mathscr{D}(A)$ 在 X 中的稠密性，可得

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda t}x = S(t)x, \ \forall x\in X, \tag{4.38}$$

关于 $t\in[0, t_0]$ 上一致收敛。利用 $e^{A_\lambda t}$ 的半群性质，通过极限，易知 $S(t)$ 是一个 C_0 类算子半群，且由(4.37)式知

$$\|S(t)\|\leqslant Me^{\omega t}, \ t\geqslant 0. \tag{4.39}$$

对于 $x\in\mathscr{D}(A)$，由(4.38)以及(4.11)，有

$$\begin{aligned} S(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty}(e^{A_\lambda t}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{A_\lambda s}A_\lambda x\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t S(s)Ax\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.40}$$

此处，用到 $e^{A_\lambda t}A_\lambda x$ 在任何大的有界区间上一致收敛于 $S(t)Ax$ 这个事实。今设 B 为 $S(t)$ 的生成元。则由(4.40)知，对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$，必有 $x\in\mathscr{D}(B)$，且

$$Bx = \lim_{t\to 0}\frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)Ax\mathrm{d}s = Ax. \tag{4.41}$$

所以，B 是 A 的一个所谓的扩张，记作 $B\supseteq A$。另一方面，由于 B 是 $S(t)$ 的生成元，故由已证明的必要性，可找到 $\lambda>\omega$，使 $(\lambda I - B)^{-1}$ 和 $(\lambda I - A)^{-1}$ 均是 X 到自身的线性有界算子。因此，对任何的 $x\in\mathscr{D}(B)$，有

$$(\lambda I - B)x\in X = (\lambda I - A)\mathscr{D}(A),$$

故存在 $y\in\mathscr{D}(A)$，使得(注意 $B\supseteq A$)

$$(\lambda I - B)x = (\lambda I - A)y = (\lambda I - B)y,$$

因此得到

$$x = y\in\mathscr{D}(A).$$

故知 $A = B$。再由定理 4.6 的 6° 知 $S(t) = T(t)$。

由上面两个定理，可知 C_0 类算子半群 $T(t)$ 和它的生成元 A 是一一对应的，即由 $T(t)$ 可唯一确定 A，由 A 也可唯一确定 $T(t)$。因此，今后将对应于算子 A 的 C_0 类算子半群记作 e^{At}。值得注意的是，由于 A 一般是一个稠定闭算子(未必有界)。[因此形如 (4.36) 式的展开式一般是没有的。所以 e^{At} 仅是一个记号。其好处是它明显地表明了所对应的生成元。以后，当 A 为 e^{At} 的生成元时，常称 A 生成 e^{At}。

算子半群理论的内容十分丰富，无法在本书中详细讨论。有兴趣的读者可以参看本书末尾所列的参考文献。

下面，讨论一下抽象发展方程的一些结果。

我们总设 X 为 Banach 空间，A 生成 C_0 类算子半群 e^{At} 且满足(4.22)。先考虑下述的发展方程：

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + f(t),\ t\in[0, T], \\ y(0) = x, \end{cases} \tag{4.42}$$

此处，$f: [0, T]\to X$ 为某映照，$x\in X$。

定义 4.8 函数 $y(\cdot)\in C([0, T]; X)$ 称为是 (4.42) 的一个古典解，如果 $y(\cdot)$ 在 $(0, T]$ 上是连续可微的，$y(t)\in \mathscr{D}(A)$，$\forall t\in(0, T]$，且使得(4.42)式满足。

在以后的讨论中，会经常用到下述记号

$C([0, T]; X) = \{y: [0, T]\to X,\ y(\cdot)$ 是连续的$\}$.

$L^p([0, T]; X) = \{y: [0, T]\to X,\ y(\cdot)$ 是 p 次可积的$\}$，
$1\leqslant p<\infty$.

$L^\infty([0, T]; X) = \{y: [0, T]\to X,\ y(\cdot)$ 是本性有界的$\}$

类似地，还有 $C^1([0, T]; X)$，$W^{1,1}([0, T]; X)$，…，等等。

命题 4.9 设 $f(\cdot)\in L^1(0, T; X)$，则对任何的 $x\in X$，(4.42) 至多存在一个古典解，并且假如古典解 $y(\cdot)$ 存在的

话，它必可表示为

$$y(t)=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\ t\in[0,T]。\quad(4.43)$$

证　设 $y(\cdot)$ 为一个古典解，则易知 $s\to e^{A(t-s)}y(s)$ 是在 $(0,t)$ 上可微的。因此，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[e^{A(t-s)}y(s)\right]&=-Ae^{A(t-s)}y(s)+e^{A(t-s)}\dot{y}(s)\\&=-Ae^{A(t-s)}y(s)+e^{A(t-s)}Ay(s)\\&\quad+e^{A(t-s)}f(s)=e^{A(t-s)}f(s)。\end{aligned}$$

当 $f(\cdot)\in L^1(0,T;X)$ 时，上式最右端是可积的。因此，对上式在 $[0,t]$ 上积分得

$$y(t)=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,T]。$$

这便证得了 (4.43) 式。而唯一性是这个结论的推论，因为若 $y_1(\cdot)$ 和 $y_2(\cdot)$ 为 (4.42) 的两个解，则令 $y(\cdot)=y_1(\cdot)-y_2(\cdot)$，它满足(4.42)式，其中对应有 $x=0$，$f(t)=0$。因此，由(4.43)式，$y(\cdot)=0$。

注意到，利用同有限维一样的方法 (见 §2)，当 A 为有界算子时，只要 $f(\cdot)\in C([0,T];X)$，便可证明(4.42)式古典解的存在唯一性。但是，当 A 为无界时，这样的期望往往不能实现。另外，在控制理论中，将遇到的 $f(\cdot)$ 关于 t 未必连续的。因此，采用古典解来研究形如(4.42)式的发展方程对我们今后研究控制理论是不够用的。上面的命题启发我们引进下述解的概念。

定义 4.10　*如果 $y(\cdot)$ 满足(4.43) 式，称函数 $y(\cdot)\in C([0,T];X)$ 为 (4.42) 的一个 mild 解。*

这样，为使(4.42)存在 mild 解，只需要 $f(\cdot)\in L^1(0,T;X)$ 就够了。同时，命题 4.9 告诉我们，如果(4.42)确有

古典解的话，它必是由(4.43)式表示的 $y(\cdot)$。因此，mild 解是一种广义解。它在使用时是相当方便的。

现在来考虑半线性发展方程：

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \ t \in [0, T]. \\ y(0) = x. \end{cases} \tag{4.44}$$

直接引进下述定义。

定义 4.11 称函数 $y(\cdot) \in C([0, T]; X)$ 为 (4.44) 式的一个 mild 解，如果 $y(\cdot)$ 是下述积分方程的一个解，即

$$y(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau, y(\tau)) \mathrm{d}\tau, \ t \in [0, T]. \tag{4.45}$$

假设 $f: [0, T] \times X \to X$ 满足下述条件：

(i) 对每个固定的 $x \in X$，$f(\cdot, x): [0, T] \to X$ 是强可测的。

(ii) 存在常数 $L > 0$，使得

$$\|f(t, x) - f(t, \hat{x})\| \leqslant L\|x - \hat{x}\|, \quad \forall t \in [0, T], x, \hat{x} \in X. \tag{4.46}$$

$$\|f(t, x)\| \leqslant L(1 + \|x\|), \ \forall t \in [0, T], x \in X. \tag{4.47}$$

则有下述的存在唯一性定理。

定理 4.12 设 X 为 Banach 空间，$A: \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ 生成 C_0 类算子半群 e^{At}。设 $f: [0, T] \times X \to X$ 满足上述的条件(i)～(ii)。则(4.44)存在唯一的 mild 解 $y(\cdot) \in C([0, T]; X)$。

证 首先，说明对任何连续函数 $z(\cdot) \in C([0, T]; X)$，函数 $f(\cdot, z(\cdot))$是强可测的。我们可以完全参照 §2 中引理 2.3 的证明来得到此结论。然后，由(4.47)式及定理 4.4 知，函数 $f(\cdot, z(\cdot)) \in L^1(0, T; X)$。然后，定义

$$y^0(t) = e^{At}x,\ t \geqslant 0. \tag{4.48}$$

$$y^m(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau,\ y^{m-1}(\tau))\mathrm{d}\tau,\ m \geqslant 1. \tag{4.49}$$

从上面的说明知，由于在归纳定义时，$y^{m-1}(\cdot) \in C([0,\ T];\ X)$，导致 $f(\cdot,\ y^{m-1}(\cdot)) \in L^1(0,\ T;\ X)$，从而 $y^m(\cdot)$有定义且也是连续的。现在作估计。为方便起见，设 $\omega \geqslant 0$,

$$\|e^{At}\| \leqslant Me^{\omega t},\ t \geqslant 0. \tag{4.50}$$

则有

$$\begin{aligned}\|y^0(t) - y^1(t)\| &\leqslant \int_0^t Me^{\omega(t-\tau)} L(1 + Me^{\omega\tau}\|x\|)\mathrm{d}\tau \\ &= ML\int_0^t e^{\omega\tau}\mathrm{d}\tau + M^2L\|x\|t \\ &\leqslant K(1 + \|x\|)Lt,\end{aligned}$$

此处K为一个绝对常数，仅依赖于 M、ω 和 T。于是

$$\begin{aligned}\|y^1(t) - y^2(t)\| &\leqslant \int_0^t Me^{\omega(t-\tau)} L\|y^0(\tau) - y^1(\tau)\|\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant Me^{\omega T}K(1 + \|x\|)\frac{(Lt)^2}{2!}.\end{aligned}$$

归纳地，可得

$$\|y^{m-1}(t) - y^m(t)\| \leqslant Me^{\omega T}K(1 + \|x\|)\frac{(Lt)^m}{m!},$$
$$t \geqslant 0,\ m \geqslant 1. \tag{4.51}$$

类似于定理 2.4 的证明可知$\{y^m(\cdot)\}_{m\geqslant 0}$在$C([0,\ T];\ X)$中是 Cauchy 的。因此，可设 $y(\cdot) \in C([0,\ T];\ X)$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\|y^m(t) - y(t)\| = 0,\ 对于\ t \in [0,\ T]一致。 \tag{4.52}$$

然后，在(4.49)中取极限，可知 $y(\cdot)$ 是 (4.44) 的一个 mild 解。今设 $\bar{y}(\cdot) \in C([0,\ T];\ X)$为另一个 mild 解，则有

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leqslant \int_0^t Me^{\omega(t-\tau)} L\|y(\tau) - \bar{y}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

从而

$$e^{-\omega t}\|y(t)-\bar{y}(t)\|\leqslant ML\int_0^t e^{-\omega\tau}\|y(\tau)-\bar{y}(\tau)\|\mathrm{d}\tau. \tag{4.53}$$

利用 Gronwall 不等式(即引理 2.5)知

$$e^{-\omega t}\|y(t)-\bar{y}(t)\|\leqslant 0, \quad \forall t\in[0, T],$$

从而得证唯一性。

最后，再讨论一下解对初始值、初始时刻的连续依赖性。由于A的无界性，有些结论与 §2 中相应的结论会有本质上不同的地方。

类似于 §2，记 $y_{t,x}(\cdot)$为下述问题的唯一解，即

$$y_{t,x}(s)=e^{A(s-t)}x + \int_t^s e^{A(s-\tau)}f(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau,\ s\in[t, T]. \tag{4.54}$$

它对应的是下述的初值问题：

$$\begin{cases}\dot{y}_{t,x}(s)=Ay_{t,x}(s)+f(s, y_{t,x}(s)),\ s\in[t, T].\\ y_{t,x}(t)=x.\end{cases} \tag{4.55}$$

对于上述问题，有下面的命题。

命题 4.13 设定理 4.12 的条件满足。则存在常数 C，仅依赖于 M、L、ω、T，使得

$$\|y_{t,x}(s)\|\leqslant C(1+\|x\|),\ \forall(t, x)\in[0, T]\times X,\quad s\in[t, T], \tag{4.56}$$

$$\|y_{t,x}(s)-y_{t,\hat{x}}(s)\|\leqslant C\|x-\hat{x}\|,\ \forall t\in[0, T],\quad x, \hat{x}\in X,\ s\in[t, T]. \tag{4.57}$$

$$\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant C\|(e^{A|\hat{t}-t|}-I)x\| + C(1+\|x\|)|t-\hat{t}|,$$

$$\forall t, \hat{t} \in [0, T], x \in X, s \in [t \vee \hat{t}, T]. \tag{4.58}$$

证 由(4.54)式及条件(4.47)知

$$\|y_{t,x}(s)\| \leqslant M e^{\omega(s-t)} \|x\| + \int_t^s M e^{\omega(s-\tau)} L(1 + \|y_{t,x}(\tau)\|) d\tau.$$

所以

$$e^{-\omega s} \|y_{t,x}(s)\| \leqslant M e^{-\omega t} \|x\| + ML \int_t^s e^{-\omega\tau} d\tau + ML \int_t^s e^{-\omega\tau} \|y_{t,x}(\tau)\| d\tau. \tag{4.59}$$

利用引理 2.5 知

$$e^{-\omega s} \|y_{t,x}(s)\| \leqslant M e^{-\omega t} \|x\| e^{ML(s-t)} + \int_t^s ML e^{-\omega\tau} e^{ML(s-\tau)} d\tau,$$

故知

$$\|y_{t,x}(s)\| \leqslant M \|x\| e^{(ML+\omega)(s-t)} + ML \int_t^s e^{(ML+\omega)(s-\tau)} d\tau.$$

所以(4.56)式得证。今考虑 $x, \hat{x} \in X$, $t \in [0, T]$, 则有

$$\|y_{t,x}(s) - y_{t,\hat{x}}(s)\| \leqslant M e^{\omega(s-t)} \|x - \hat{x}\| + \int_t^s M e^{\omega(s-\tau)} L \|y_{t,x}(\tau) - y_{t,\hat{x}}(\tau)\| d\tau.$$

故知

$$e^{-\omega s} \|y_{t,x}(s) - y_{t,\hat{x}}(s)\| \leqslant M e^{-\omega t} \|x - \hat{x}\| + \int_t^s ML e^{-\omega\tau} \|y_{t,x}(\tau) - y_{t,\hat{x}}(\tau)\| d\tau. \tag{4.60}$$

所以，由引理 2.5 可知

$$e^{-\omega s}\|y_{t,x}(s)-y_{t,\hat{x}}(s)\|\leqslant Me^{-\omega t}\|x-\hat{x}\|e^{ML(s-t)},$$

得(4.57)式。最后，考察 $0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T$，$x\in X$，$\hat{t}\leqslant s\leqslant T$，

$$\begin{aligned}\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant&\|(e^{A(s-\hat{t})}-e^{A(s-\hat{t})})x\|\\&+\int_{\hat{t}}^{s}Me^{\omega(s-\tau)}L\|y_{t,x}(\tau)-y_{\hat{t},x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau\\&+\int_{t}^{\hat{t}}Me^{\omega(s-\tau)}L(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau\\\leqslant&Me^{\omega(s-\hat{t})}\|(e^{A(\hat{t}-t)}-I)x\|\\&+ML\int_{t}^{\hat{t}}e^{\omega(s-\tau)}(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau\\&+ML\int_{\hat{t}}^{s}e^{\omega(s-\tau)}\|y_{t,x}(\tau)-y_{\hat{t},x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}e^{-\omega s}\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant&Me^{-\omega\hat{t}}\|(e^{A(\hat{t}-t)}-I)x\|\\&+ML\int_{t}^{\hat{t}}e^{-\omega\tau}(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau\\&+ML\int_{\hat{t}}^{s}e^{-\omega\tau}\|y_{t,x}(\tau)-y_{\hat{t},x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau,\\&\forall s\in[\hat{t},T].\end{aligned}\tag{4.61}$$

利用引理 2.5，得

$$\begin{aligned}e^{-\omega s}\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant e^{ML(s-\hat{t})}\{&Me^{-\omega\hat{t}}\|(e^{A(\hat{t}-t)}-I)x\|\\&+ML\int_{t}^{\hat{t}}e^{-\omega\tau}(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau\}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant&Me^{(ML+\omega)(s-\hat{t})}\|(e^{A(\hat{t}-t)}-I)x\|\\&+MLe^{ML(s-\hat{t})}\int_{t}^{\hat{t}}e^{\omega(s-\tau)}(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

于是，再利用已证的(4.56)式，立即得到(4.58)式。

由于 A 的无界性，$t \mapsto e^{At}$ 按照算子范数不是连续的。因此，在(4.58)式中出现了一项

$$C\|(e^{A|t-\hat{t}|}-I)x\|,$$

当 $|t-\hat{t}|\to 0$ 时，它趋于零，但是它趋于零的情形是依赖于 x 的。

§5 偏微分方程有关结果

在这一节中，将简单介绍一下本书中将要用到的偏微分方程的有关结果。大部分结果的证明都是相当冗长并具很高技巧性的。因此，不可能在此给出它们的证明。对于初学者而言，只要能理解这些结论的意思就可以了。而对于比较熟悉偏微分方程理论的读者而言，本节的内容恰好给出了一个偏微分方程有关结果的小结，这对于阅读后面有关内容无疑是有帮助的。

首先，我们罗列一下有关索伯列夫空间的一些结果。现介绍下面的一些常用记号。设 $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{R}^n$ 中的点表示为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为任一组非负整数。称 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为一个多重指标，而定义

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},\ \forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

我们常记 $D=(D_1, D_2, \cdots, D_n)$，其中 $D_k=\dfrac{\partial}{\partial x_k}$。而简记

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$$

$$=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

今设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界区域，其边界记为 $\partial\Omega$，闭包记为 $\bar{\Omega}$。我们总设 $\partial\Omega$ 是光滑的。比如说 $\partial\Omega$ 是 C^k 的，即对任何 $x\in\partial\Omega$，存在一个小球 B，以 x 为中心，对某个 i，使得 $\partial\Omega\cap B$ 可以表示为 $x_i=\varphi(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$，且函数 φ 是 C^k 的。

我们记 $C^m(\Omega)$ 和 $C^m(\bar{\Omega})$ 分别为定义于 Ω 和 $\bar{\Omega}$ 上的 m 次连续可微函数全体，而记 $C_0^m(\Omega)$ 为 $C^m(\Omega)$ 中具有紧支集的函数全体。函数 $\varphi(\cdot)\in C^m(\Omega)$ 称为具有紧支集，如果对某个紧集 $G\subset\Omega$，有

$$\varphi(x)=0,\ \forall x\in\Omega\backslash G.$$

对于 $y(\cdot)\in C^m(\Omega)$，及 $1\leqslant p<\infty$，定义

$$\|y\|_{m,p}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha y|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{5.1}$$

一般而言，并不知道(5.1)是否有意义，即右端的积分未必存在。于是，令

$$\tilde{C}_p^m(\Omega)=\{y(\cdot)\in C^m(\Omega):\|y\|_{m,p}<\infty\},$$

则容易知道，(5.1)是 $\tilde{C}_p^m(\Omega)$ 上的一个范数。空间 $\tilde{C}_p^m(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{m,p}$ 下是不完备的。将该空间按 $\|\cdot\|_{m,p}$ 完备化（即将所有 Cauchy 序列的极限全部与 $\tilde{C}_p^m(\Omega)$ 本身合在一起）。记此完备化了的空间为 $W^{m,p}(\Omega)$。类似地，记 $C_0^m(\Omega)$ 在 $\|\cdot\|_{m,p}$ 下的完备化为 $W_0^{m,p}(\Omega)$。当 $p=2$ 时，也常记 $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$，$W_0^{m,2}(\Omega)=H_0^m(\Omega)$。容易知道，$W^{m,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 均为 Banach 空间，而 $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 均为 Hilbert 空间，其内积为

$$(y,z)_m=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}D^\alpha y\overline{D^\alpha z}\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

上面定义的空间统称为索伯列夫空间。可以证明一个函数 $y(\cdot)\in W^{m,p}(\Omega)$ 当且仅当 $y(\cdot)$ 的所有 α 阶（$|\alpha|\leqslant m$）的广义

导数 $D^{\alpha}y \in L^p(\Omega)$。

下面的定理常称为索伯列夫嵌入定理，它在索伯列夫空间理论中占十分重要的地位。为叙述此定理，首先介绍两个概念。设X和Y为两个 Banach 空间，称X是连续地嵌入到Y中去，如果存在一个连续线性的一一映照 i：$X \to Y$。此时，记

$$X \hookrightarrow Y.$$

进一步，若 i 是一个紧算子，即它将X中的有界集映成Y中的致密集($\forall \{x_n\} \subset X$，$\|x_n\|_X \leqslant C \Rightarrow$ 存在子列$\{x_{n_k}\}$，使得 $i(x_{n_k})$ 在Y中收敛)，则称该嵌入是紧的。

定理 5.1 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界区域。

(i) 对任何整数 $m \geqslant 0$，$1 \leqslant p \leqslant r \leqslant +\infty$，

$$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega). \tag{5.3}$$

(ii) 设 $\partial\Omega$ 为 C^1 的，$0 \leqslant j < m$，$1 \leqslant r$，$p < \infty$ 满足

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} + \frac{j}{n} - \frac{m}{n}, \tag{5.4}$$

则

$$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega) \tag{5.5}$$

且嵌入是紧的。

(iii) 设 $\partial\Omega$ 是 C^{σ} 的，则

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-kp)}(\Omega), \ \forall kp < n, \tag{5.6}$$

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\sigma}(\bar{\Omega}), \ \forall 0 \leqslant \sigma < k - \frac{n}{p}. \tag{5.7}$$

为了对上述定理加深一点影响，再来看一下上述结论的一些特例。

1° 设 $m = 0$，$1 \leqslant p \leqslant r \leqslant +\infty$，则(5.3)式变为

$$L^r(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{5.8}$$

这便是熟知的 L^p—空间之间的包含关系。利用 Hölder 不等

式，读者不难证明该结论。

2° 设 $m=1$，$j=0$，$1\leqslant r=p<\infty$，则(5.5)式变为

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega) \tag{5.9}$$

且嵌入是紧的，即对任何 $y_k: \Omega\to\boldsymbol{R}$，只要

$$\|y_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}\equiv\Big[\int_\Omega|y_k(x)|^p\mathrm{d}x + \int_\Omega\sum_{i=1}^n\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}y_k(x)\Big|^p\mathrm{d}x\Big]^{1/p}\leqslant C,\ \forall k\geqslant 1, \tag{5.10}$$

则必存在一个子列 $\{y_{k_j}(\cdot)\}$，使得对某个 $y(\cdot)\in L^p(\Omega)$，有

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\int_\Omega|y_{k_j}(x)-y(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}=0. \tag{5.11}$$

不过，需要特别注意并非对任何的 r，$p\in[1,\infty)$，都成立

$$W^{1,r}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{5.12}$$

要使(5.12)式成立(且嵌入紧致)，需要条件

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{r}-\frac{1}{n}. \tag{5.13}$$

3° 设 $k=1$，则(5.7)式变为

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow C^\sigma(\bar{\Omega}),\ \forall 0\leqslant\sigma<1-\frac{n}{p}. \tag{5.14}$$

上式意味着当 $p>n$ 时，任何 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的函数必是 Hölder 连续的。但仍需注意，当 $p\leqslant n$ 时，$W^{1,p}(\Omega)$ 中的函数未必是连续的！这是由于导数是广义导数。初学者对此点必须特别当心。

现在考虑边值问题：

$$\Delta v(x)=f(x),\ x\in\Omega, \tag{5.15}$$

$$v|_{\partial\Omega}=0, \tag{5.16}$$

此处，Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个有界区域，其边界为 $\partial\Omega$，假设 $\partial\Omega$ 是光滑的。而 Δ 常称为 Laplace 算子，其定义为

$$\Delta v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \tag{5.17}$$

另外，函数 $f(\cdot)$ 是给定的。方程(5.15)常称为 Poisson 方程，(5.16)式常称为齐次边值条件，因此，称(5.15)、(5.16)式为 Poisson 方程的齐次边值问题。对于该问题，有下述的经典结果：

定理 5.2 (i) 若 $f(\cdot)\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$，$0<\alpha<1$，则存在唯一的 $v(\cdot)\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$，满足(5.15)、(5.16)，且存在仅依赖于 n，α，Ω 的常数 C，使得

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}\leqslant C\|f\|_{C^{\alpha}(\Omega)}. \tag{5.18}$$

(ii) 若 $f(\cdot)\in L^{p}(\Omega)$，$1<p<\infty$，则存在唯一的 $v(\cdot)\in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$，满足(5.15)、(5.16)，且存在仅依赖于 n，p，Ω 的常数 C，使得

$$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L^{p}(\Omega)}. \tag{5.19}$$

上述的结论对于一般的二阶线性椭圆型偏微分方程的边值问题均成立(当然在适当的条件下)。这里所指的方程是在(5.15)式中，将 Laplace 算子 Δ 换成

$$Lv=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+a(x)v. \tag{5.20}$$

其中，$(\alpha_0>0)$

$$\begin{cases}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha_0\|\xi\|^2, \ \forall\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n,\ x\in\Omega.\\ a(x)\leqslant 0, \quad x\in\Omega.\end{cases} \tag{5.21}$$

且 $a_{ij}(\cdot)=a_{ji}(\cdot)$，$a_i(\cdot)$、$a(\cdot)$ 具有一定的光滑性。由于本

书中不会用到它们，故在此不详述了。

上述定理中的结论(i)告诉我们，只要方程右端 f 是 $C^\alpha(\bar{\Omega})(0<\alpha<1)$，则必有唯一的 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$的解 $v(\cdot)$。对一般二阶线性椭圆型方程的这个理论常称 Schauder 理论。必须注意，该结论对于 $\alpha=0$ 是不成立的！可举出反例说明存在连续的 $f(\cdot)$，使得问题(5.15)、(5.16) 不存在 $C^2(\bar{\Omega})$解。定理5.2 的 (ii) 告诉我们，当 $f(\cdot)$ 是 $L^p(\Omega)$ 时，$(1<p<\infty)$、(5.15)、(5.16)存在唯一的 $W^{2,p}(\Omega)$解。对于一般二阶线性椭圆型方程的这个理论常称之为 L^p—理论。利用 Sobolev 嵌入定理知，当 $p>\frac{n}{2}$ 时，解 $v(\cdot)$是$C^\alpha(\bar{\Omega})\left(0\leqslant\alpha<2-\frac{n}{p}\right)$的。进一步，若 $p>n$，则 $v(\cdot)$还是$C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})\left(0\leqslant\alpha<1-\frac{n}{p}\right)$的。

现在，考虑下述的拟线性方程

$$\begin{cases}-\varepsilon\Delta v(x)+\lambda v(x)-H(x,\ v_x(x))=0,\ x\in B_R,\\ v|_{\partial B_R}=0.\end{cases}\tag{5.22}$$

其中，$B_R=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ |x|<R\}$，$R>0$，$\varepsilon>0$。上述方程的讨论将对第二章§3的内容起关键作用。对函数 $H:\ \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 作如下假设：$H(\cdot,\ \cdot)$是 C^1 的，且

$$H(\cdot,\ 0)\in L^\infty(B_R),\tag{5.23}$$

$$H_x(x,\ p)\cdot p\leqslant\lambda|p|^2,\ \forall|p|\text{足够大},x\in B_R.\tag{5.24}$$

$$|H(x,\ p)|\leqslant C_R(1+|p|^2),\ \forall x\in B_R,\ p\in\boldsymbol{R}^n.\tag{5.25}$$

定理5.3 设(5.23)～(5.25)成立，则问题(5.22)存在唯一的解 $v(\cdot)\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_R)$，且

$$|v(\cdot)|_{L^\infty(B_R)}\leqslant\frac{1}{\lambda}|H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(B_R)}.\tag{5.26}$$

下面，证明上述定理。在该定理的证明中，包含了许多很好的证明技巧和思想。

证　第一步：L^∞-估计。

设 $v(\cdot)\in C^2(\overline{B}_R)$ 为 (5.22) 的一个解。假如存在 $x_0\in B_R$，使得

$$v(x_0)\geqslant v(x),\ \forall x\in B_R, \tag{5.27}$$

则易知，

$$v_x(x_0)=0,\ \Delta v(x_0)\leqslant 0. \tag{5.28}$$

因此，由(5.22)式知

$$\begin{aligned}\lambda v(x_0)&=\varepsilon\Delta v(x_0)+H(x_0,\ v_x(x_0))\\&\leqslant H(x_0,\ 0)\leqslant |H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(B_R)}.\end{aligned}$$

故结合(5.27)式，可得

$$v(x)\leqslant\frac{1}{\lambda}|H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(B_R)},\ \forall x\in B_R. \tag{5.29}$$

同理，若存在 $x_0\in B_R$，使得

$$v(x_0)\leqslant v(x),\ \forall x\in B_R. \tag{5.30}$$

则

$$v(x)\geqslant-\frac{1}{\lambda}|H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(B_R)},\ \forall x\in B_R. \tag{5.31}$$

注意到 $v|_{\partial B_R}=0$，可知

$$|v(\cdot)|_{L^\infty(B_R)}\leqslant\frac{1}{\lambda}|H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(B_R)}. \tag{5.32}$$

第二步：$\sup\limits_{\partial B_R}|Dv|$ 的估计。($Dv\equiv\nabla v\equiv v_x$)。

仍设 $v(\cdot)\in C^2(\overline{B}_R)$ 为(5.22)的一个解。任取 $x_0\in\partial B_R$，$r>0$。令

$$B_r(y)=\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x-y|<r\},$$

使得

$$\overline{B_r(y)} \cap \bar{B}_R = \overline{B_r(y)} \cap \partial B_R = \{x_0\}. \tag{5.33}$$

定义

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial B_r(y)), \ x \in \bar{B}_R. \tag{5.34}$$

则易知，

$$\begin{cases} d(x) = \|x - y\| - r > 0, \ \forall x \in \bar{B}_R, x \neq x_0, \\ d(x_0) = 0. \end{cases} \tag{5.35}$$

定义

$$\psi(d) = \frac{1}{\mu}\log(1 + kd), \ \forall d \in [0, \infty), \tag{5.36}$$

此处，k 和 μ 为待定常数。然后，置

$$w(x) = \psi(d(x)), \ x \in \bar{B}_R. \tag{5.37}$$

则

$$\begin{aligned} \nabla w(x) &= \psi'(d(x)) \frac{x - y}{\|x - y\|} \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{k}{1 + kd(x)} \frac{x - y}{\|x - y\|}, \\ \Delta w(x) &= \psi''(d(x)) + \psi'(d(x)) \Delta d(x) \\ &= (n-1)\psi'(d(x)) - \frac{1}{\mu} \frac{k^2}{[1 + kd(x)]^2} \\ &= -\mu\psi'(d(x))^2 + (n-1)\psi'(d(x)), \end{aligned}$$

此处，$\Delta d(x) = n - 1$，$\forall x \in B_R$。从而，

$$\begin{aligned} &\varepsilon\Delta w(x) - \lambda v(x) + H(x, \nabla w(x)) \\ &= -\varepsilon\mu\psi'(d(x))^2 + \varepsilon(n-1)\psi'(d(x)) \\ &\quad - \lambda v(x) + H\left(x, \psi'(d(x)) \frac{x - y}{\|x - y\|}\right) \\ &\leqslant -\varepsilon\mu\psi'(d(x))^2 + \lambda |v(\cdot)|_{L^\infty(B_R)} \\ &\quad + C_R(1 + |\psi'(d(x))|^2) \\ &\quad + \varepsilon(n-1)\psi'(d(x)) \end{aligned}$$

$$\leqslant -(\varepsilon\mu - C_R)\psi'(d(x))^2 + |H(\cdot, 0)|_{L^\infty(B_R)}$$
$$+ C_R + \varepsilon(n-1)[\psi'(d(x))^2 + 1]$$
$$\leqslant -(\varepsilon\mu - C'_R)\frac{1}{\mu^2}\frac{k^2}{(1+kd(x))^2}$$
$$+ |H(\cdot, 0)|_{L^\infty} + C'_R, \tag{5.38}$$

此处，$C'_R \geqslant C_R + \varepsilon(n-1)$。取 $a>0$ 待定，置

$$\mathcal{N} = \{x \in B_R; d(x) < a\}. \tag{5.39}$$

暂记 $c_1 = |H(\cdot, 0)|_{L^\infty(B_R)} + C'_R$，且令 $\mu > C'_R/\varepsilon$，则

$$\varepsilon\Delta w(x) - \lambda v(x) + H(x, \nabla w(x))$$
$$\leqslant -(\varepsilon\mu - C'_R)\frac{1}{\mu^2}\frac{k^2}{(1+ka)^2} + c_1. \tag{5.40}$$

而当 $d(x) = a$ 时，

$$w(x) = \psi(a) = \frac{1}{\mu}\log(1+ka) \tag{5.41}$$

需要适当地选取 k，μ 和 a，使得

$$\begin{cases} \mu > C'_R/\varepsilon, \\ -(\varepsilon\mu - C'_R)\dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{k^2}{(1+ka)^2} + c_1 \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\mu}\log(1+ka) \geqslant |v(\cdot)|_{L^\infty(B_R)}. \end{cases} \tag{5.42}$$

如果(5.42)式成立，则

$$\begin{cases} \varepsilon\Delta w(x) - \lambda v(x) + H(x, \nabla w(x)) \leqslant 0, \ x \in \mathcal{N}, \\ w|_{\partial\mathcal{N}} \geqslant v|_{\partial\mathcal{N}} \end{cases} \tag{5.43}$$

因此，若记 $\theta(x) = w(x) - v(x)$，则

$$\varepsilon\Delta\theta(x) + H(x, \nabla w(x)) - H(x, \nabla v(x)) \leqslant 0, \ x \in \mathcal{N}. \tag{5.44}$$

由于 $H(\cdot, \cdot)$是 C^1 的，故可定义

$$\tilde{H}(x) = \int_0^1 H_p(x, \nabla v(x)$$

$$+\sigma(\nabla w(x)-\nabla v(x)))\mathrm{d}\sigma,\ x\in B_R. \tag{5.45}$$

由此及(5.44)式可得

$$\begin{cases}\varepsilon\Delta\theta(x)+\overline{H}(x)\cdot\nabla\theta(x)\leqslant 0,\ x\in\mathcal{N},\\ \theta(x)\geqslant 0,\ x\in\partial\mathcal{N}.\end{cases} \tag{5.46}$$

我们说，此时必有

$$\theta(x)\geqslant 0,\ \forall x\in\partial\mathcal{N}. \tag{5.47}$$

事实上，由(5.45)式知，存在 $r>0$，使得

$$|\overline{H}(x)|<r\varepsilon,\ \forall x\in\mathcal{N}. \tag{5.48}$$

于是，考虑

$$\zeta_\delta(x)=\theta(x)-\delta e^{rx_1}.$$

则有

$$\begin{aligned}&\varepsilon\Delta\zeta_\delta(x)+\overline{H}(x)\cdot\nabla\zeta_\delta(x)\\ &=\varepsilon\Delta\theta(x)+\overline{H}(x)\cdot\nabla\theta(x)\\ &\quad-\delta r[\varepsilon r-\langle\overline{H}(x),\ e_1\rangle]e^{rx_1}\\ &\leqslant-\delta r[\varepsilon r-|\overline{H}(x)|]e^{rx_1}<0.\end{aligned} \tag{5.49}$$

因此，易知函数 $\zeta_\delta(\cdot)$ 在$\mathcal{N}$的内部取不到极小值. 因为假如在 $x_0\in\mathcal{N}$，$\zeta_\delta(\cdot)$取到一个局部极小，则

$$\Delta\zeta_\delta(x_0)+\overline{H}(x_0)\cdot\nabla\zeta_\delta(x_0)=\Delta\zeta_\delta(x_0)\geqslant 0. \tag{5.50}$$

这与(5.49)式矛盾. 从而，有

$$\inf_{\mathcal{N}}\zeta_\delta(x)=\inf_{\partial\mathcal{N}}\zeta_\delta(x),$$

即

$$\inf_{\mathcal{N}}(\theta(x)-\delta e^{rx_1})=\inf_{\partial\mathcal{N}}(\theta(x)-\delta e^{rx_1}).$$

令 $\delta\to 0$，得到

$$\inf_{\mathcal{N}}\theta(x)-\inf_{\partial\mathcal{N}}\theta(x)\geqslant 0. \tag{5.51}$$

这便证得(5.47)式，亦即

$$v(x)\leqslant w(x),\ \forall x\in\mathcal{N}. \tag{5.52}$$

类似地，考虑函数 $\psi(d(x))$，可证

$$v(x)\geqslant -w(x),\ \forall x\in\mathcal{N}. \tag{5.53}$$

再注意到，

$$w(x_0)-\psi(d(x_0))=\psi(0)=0=v(x_0),$$

因此，对任何 $x\in\mathcal{N}$，有

$$\left|\frac{v(x)-v(x_0)}{\|x-x_0\|}\right|\leqslant\frac{w(x)-w(x_0)}{\|x-x_0\|}. \tag{5.54}$$

令 $\|x-x_0\|\to 0$，得到

$$|Dv(x_0)|\leqslant|Dw(x_0)|=\psi'(0)=\frac{k}{\mu}. \tag{5.55}$$

由于 $x_0\in\partial B_R$ 是任意的，得到

$$|Dv(x)|\leqslant\frac{k}{\mu},\ \forall x\in\partial B_R. \tag{5.56}$$

现在，回到(5.42)式。取

$$\begin{cases}\mu=\dfrac{C'_R}{\varepsilon}+1,\\[2mm] -\dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{k^2}{(1+ka)^2}+c_1=0,\\[2mm] \dfrac{1}{\mu}\log(1+ka)=\dfrac{1}{\lambda}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}.\end{cases} \tag{5.57}$$

从而，

$$1+ka=e^{\frac{\mu}{\lambda}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}},$$

$$k=\sqrt{c_1}\mu(1+ka)=\sqrt{c_1}\,\mu e^{\frac{\mu}{\lambda}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}}.$$

因此，由(5.56)式知

$$\begin{aligned}|Dv(x)|&\leqslant\sqrt{c_1}\,e^{\frac{\mu}{\lambda}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}}\\&=[|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}\\&\quad+C'_R]^{1/2}e^{\frac{C'_R+\varepsilon}{\lambda\varepsilon}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}},\ x\in\partial B_R.\end{aligned} \tag{5.58}$$

第三步：$\sup\limits_{B_R}|Dv|$估计。

设 $v(\cdot)\in C^3(\bar{B}_R)$为(5.22)的一个解。考察下述过程：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\Delta|Dv|^2 &= \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta(v_{x_i}^2) = 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}[(\Delta v_{x_i})v_{x_i} + |\nabla v_{x_i}|^2] \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\{[\lambda v - H(x, Dv)]_{x_i}v_{x_i}\} \\
&\quad + 2\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n}|v_{x_i x_j}|^2\} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\{\lambda v_{x_i}^2 - H_{x_i}(x, Dv)v_{x_i} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}H_{p_j}(x, Dv)v_{x_i x_j}v_{x_i}\} \\
&\quad + 2\varepsilon\sum_{\substack{i,j=1\\ (i\neq j)}}^{n}|v_{x_i x_j}|^2 + 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i x_i}|^2 \qquad (5.59) \\
&\geqslant 2\lambda|\nabla v^2 - 2H_x(x, Dv)\cdot Dv \\
&\quad - H_p(x, Dv)\cdot D|Dv|^2 + \frac{2\varepsilon}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}v_{x_i x_i}\right)^2 \\
&= 2\lambda|\nabla v|^2 - 2H_x(x, Dv)\cdot Dv - H_p(x, Dv) \\
&\quad \cdot D|Dv|^2 + \frac{2}{n\varepsilon}(\lambda v - H(x, Dv))^2.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\Delta|Dv|^2 + H_p(x, Dv)\cdot D|Dv|^2 \\
&\qquad \geqslant 2\{\lambda|\nabla v|^2 - H_x(x, Dv)\cdot Dv \\
&\qquad\quad + \frac{1}{n\varepsilon}(\lambda v - H(x, Dv))^2\} \qquad (5.60)
\end{aligned}
$$

由条件 (5.24) 知存在 $L>0$，使得在区域 $\tilde{B}_L=\{x\in B_R;\ |Dv(x)|>L\}$中有

$$
\varepsilon\Delta|Dv|^2 + H_p(x, Dv)\cdot D|Dv|^2\geqslant 0. \qquad (5.61)
$$

因此，类似于由(5.46)式导致(5.47)式的证明，可得

$$\sup_{\tilde{B}_L}|Dv|^2=\sup_{\partial\tilde{B}_L}|Dv|^2\leqslant\max\{L^2,\ \sup_{\partial B_R}|Dv|^2\}. \tag{5.62}$$

由(5.58)式及 $\tilde{B}_L$ 的定义知

$$\sup_{B_R}|Dv|\leqslant\max\{L,\ (|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}$$

$$+C_R)^{1/2}e^{\frac{C_R+\varepsilon}{\lambda\cdot\varepsilon}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}}\}. \tag{5.63}$$

上式对 (5.22) 式的任何 C^2 解均成立。事实上，令 $v(\cdot)$ 为(5.22)方程的一个 C^2 解。令 $v_m(\cdot)\in C_0^3(B_R)$满足

$$D^\beta v_m(x)\to D^\beta v(x),\ 在\ \bar{B}_R\ 上一致,\forall|\beta|\leqslant 2. \tag{5.64}$$

则易见

$$g_m(x)\equiv-\varepsilon\Delta v_m(x)+\lambda v_m(x)-H(x,\ Dv_m(x))\to 0,$$
$$关于\ x\in\bar{B}_R\ 一致. \tag{5.65}$$

令

$$H_m(x,\ p)=H(x,\ p)+g_m(x),\ x\in\bar{B}_R,\ p\in\boldsymbol{R}^n, \tag{5.66}$$

则 $H_m(\cdot,\ \cdot)$ 满足与 $H(\cdot,\ \cdot)$ 类似的条件。因此，有类似于(5.63)式的不等式对 $v_m(\cdot)$成立。令 $m\to\infty$，可得到 (5.63)式。

第四步：对 $W^{2,p}(B_R)$ 估计。

设 $v(\cdot)\in C^2(\bar{B}_R)$为(5.22)方程的一个解，则由前三步知(5.32)和(5.63)式成立。因此，对任何 $x\in B_R$，

$$\begin{aligned}&|\lambda v(x)-H(x,\ Dv(x))|\\&\leqslant|H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(B_R)}+C_R(1+\sup_{B_R}|Dv(x)|^2)\\&\leqslant C(|H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(B_R)},\ \lambda,\ \varepsilon,\ L,\ C_R).\end{aligned} \tag{5.67}$$

所以

$$f(\cdot)\equiv\lambda v(\cdot)-H(\cdot,\ Dv(\cdot))\in L^\infty(B_R).$$

由定理 5.2 知，对任何$1<p<\infty$，

$$\|v\|_{W^{2,p}(B_R)} \leqslant C\|f\|_{L^p(B_R)} \leqslant M_0. \tag{5.68}$$

此处，M_0 仅依赖于 $|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}$、$\lambda$、$\varepsilon$、$L$、$C_R$、$p$ 和 R。

第五步：(5.22)方程解的存在性。

为证明(5.22)解的存在性，先叙述下面重要引理。

引理 5.4 (Leray-Schauder 不动点定理) 设 Z 为 Banach 空间 T: $Z \to Z$ 是一个连续的紧映照，且存在常数 $M>0$，使得对任何 $\sigma \in [0,1]$，以及 $z \in Z$ 满足 $z=\sigma Tz$，均成立

$$\|z\|_Z < M. \tag{5.69}$$

则 T 必存在一个不动点(即对某个 $z_0 \in Z$，$Tz_0 = z_0$)。

我们在这里不证明该引理，有兴趣的读者可在有关泛函分析或偏微分方程书籍中找到证明。现在，利用该引理来完成第五步的证明。取 $Z=C^{1,\beta}(\overline{B}_R)$，此处，$\beta \in (0,1)$ 为一个固定数。然后，定义 T: $C^{1,\beta}(\overline{B}_R) \to C^{1,\beta}(\overline{B}_R)$ 如下：$\forall w(\cdot) \in C^{1,\beta}(\overline{B}_R)$，$v=Tw$ 为下述问题的唯一解：

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta v + \lambda w - H(x,\nabla w) = 0, \ x \in B_R, \\ v|_{\partial B_R} = 0. \end{cases} \tag{5.70}$$

由定理5.2知 $v \equiv Tw \in C^{2,\beta}(\overline{B}_R)$。因为 $w(\cdot) \in C^{1,\beta}(\overline{B}_R)$，$H(\cdot,\cdot) \in C^1$。从而 $\lambda w(\cdot) - H(\cdot,\nabla w(\cdot)) \in C^\beta(\overline{B}_R)$。且对任何 $w(\cdot)$，$\hat{w}(\cdot) \in C^{1,\beta}(\overline{B}_R)$，我们有

$$\begin{aligned} \|Tw - T\hat{w}\|_{C^{1,\beta}(\overline{B}_R)} &\leqslant \frac{C}{\varepsilon} \|\lambda(w-\hat{w}) \\ &\quad + H(\cdot,\nabla\hat{w}) - H(\cdot,\nabla w(\cdot))\|_{C^\beta(\overline{B}_R)}) \\ &\leqslant \frac{C}{\varepsilon} [\lambda \|w-\hat{w}\|_{C^\beta(\overline{B}_R)} \\ &\quad + C(\|\nabla w\|_{L^\infty}, \|\nabla\hat{w}\|_{L^\infty}) \|w-\hat{w}\|_{C^{1,\beta}(\overline{B}_R)}]. \end{aligned} \tag{5.71}$$

可见，T 是连续的。另一方面，若

$$\|w_k\|_{C^{1,\beta}(\bar{B}_R)}\leqslant C,\ \forall k\geqslant 1. \tag{5.72}$$

则由

$$\begin{aligned}\|Tw_k\|_{C^{2,\beta}(\bar{B}_R)}&\leqslant\frac{C}{\varepsilon}\|\lambda w_k-H(\cdot,\nabla w_k)\|_{C^{\beta}(\bar{B}_R)}\\&\leqslant\frac{C}{\varepsilon}[\lambda\|w_k\|_{C^{\beta}(\bar{B}_R)}\\&\quad+C(\|\nabla w_k\|)\|w_k\|_{C^{1,\beta}(\bar{B}_R)}]\leqslant\bar{C}.\end{aligned}$$

易知，$C^{2,\beta}(\bar{B}_R)$中的有界集在$C^{1,\beta}(\bar{B}_R)$中是致密的。因此，T 是一个紧映照。今对任何 $\sigma\in[0,1]$，考虑方程 $v=\sigma Tv$，它等价于下述问题：

$$\begin{cases}-\varepsilon\Delta v+\sigma\lambda v-\sigma H(x,\nabla v)=0,\ x\in B_R,\\ v|_{\partial B_R}=0,\end{cases} \tag{5.73}$$

易知，对于 $\sigma\in(0,1]$，条件(5.23)～(5.25)均成立。因此，对于任何 (5.73) 的 $C^{2,\alpha}(\bar{B}_R)$解 $v(\cdot)$，由前面的第一至第四步知，

$$\|v\|_{W^{2,p}(B_R)}\leqslant M_0,\ \forall 1<p<\infty. \tag{5.74}$$

今取 $p>\frac{n}{1-\beta}$，则 $0<\beta<1-\frac{n}{p}$。从而，由(5.14)式知，存在常数 $M>0$，不依赖于 $v(\cdot)$和 $\sigma\in(0,1]$，使得

$$\|v\|_{C^{1,\beta}(\bar{B}_R)}<M. \tag{5.75}$$

而 $\sigma=0$ 时，$v=0$，故上式显然成立。从而，由引理 5.4 知，T 存在一个不动点。即 (5.22) 方程存在一个解 $v(\cdot)\in C^{2,\beta}(\bar{B}_R)$。

第六步：(5.22)解的唯一性。

假设 $v(\cdot)$和 $\hat{v}(\cdot)$ 为 (5.22) 方程的两个解。置 $w(\cdot)=v(\cdot)-\hat{v}(\cdot)$，则有

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta w+\lambda w-\overline{H}(x)\cdot\nabla w=0,\ x\in B_R, \\ w|_{\partial B_R}=0. \end{cases} \tag{5.76}$$

此处，

$$\overline{H}(x)=\int_0^1 H_p(x,\nabla\hat{v}(x)+r(\nabla v(x)-\nabla\hat{v}(x)))\mathrm{d}r,\ x\in B_R. \tag{5.77}$$

然后，类似于(5.47)式的证明，可得

$$w(x)=0,\ x\in\overline{B}_R, \tag{5.78}$$

这便证明了解的唯一性。

上面定理的证明方法通常称为先验估计方法。相应地，估计式(5.32)、(5.58)、(5.63)及(5.68)常称为先验估计。

需要指出的是，定理 5.3 的结论对更一般的二阶拟线性椭圆型方程及更一般的有界区域均成立。由于本书不会用到那更一般的结论，限于篇幅，这里就不详述了。

现在，考虑下述问题。

$$-\varepsilon\Delta v+\lambda v-H(x,v_x)=0,\ x\in\boldsymbol{R}^n. \tag{5.79}$$

上面问题与(5.22)式不同之处是，它是在整个 $\boldsymbol{R}^n$ 中求解。假设 $H(\cdot,\cdot)$ 是 C^1 的，且

$$H(\cdot,0)\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n), \tag{5.80}$$

$$H_p(x,p)\cdot p\leqslant\lambda|p|^2,\ \forall x\in\boldsymbol{R}^n,\ |p|\geqslant L, \tag{5.81}$$

$$|H(x,p)|\leqslant C_0(1+|p|^2),\quad \forall(x,p)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n. \tag{5.82}$$

由定理 5.3 知，当(5.80)～(5.82)式成立时((5.23)～(5.25)式此时必成立)，存在 $v_R\in C^{2,\alpha}(\overline{B}_R)$ 满足

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta v_R+\lambda v_R-H(x,Dv_R)=0,\ x\in B_R, \\ v_R|_{\partial B_R}=0. \end{cases} \tag{5.83}$$

且

$$|v(\cdot)|_{L^\infty(B_R)} \leqslant \frac{1}{\lambda}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(B_R)}$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(R^n)}. \tag{5.84}$$

由估计式(5.63)知(注意 $C_R \equiv C_0$, $\forall R>0$),

$$\sup_{B_R}|Dv_R| \leqslant C, \tag{5.85}$$

此处,常数 C 不依赖于 R。从而可知,对任何给定的 $R_0>0$,当 $R \geqslant R_0$ 时,

$$\|v_R(\cdot)\|_{W^{2,p}(B_{R_0})} \leqslant M_0, \tag{5.86}$$

此处的常数 M_0 是不依赖于 R 的。因此,存在子列 $R_n \to \infty$,使得

$$v_{R_n}(\cdot) \xrightarrow{W} v(\cdot), \text{ in } W^{2,p}(B_{R_0}), \tag{5.87}$$

由 Sobolev 嵌入定理知,对某个 $\beta \in (0,1)$,

$$v_{R_n}(\cdot) \xrightarrow{S} v(\cdot), \text{ in} C^{2,\beta}(\bar{B}_{R_0}). \tag{5.88}$$

因此,$v(\cdot)$满足

$$-\varepsilon\Delta v + \lambda v - H(x, Dv) = 0, \; x \in B_{R_0}. \tag{5.89}$$

利用对角线原理,可设

$$v_{R_n}(\cdot) \xrightarrow{S} v(\cdot), \text{ in } C^{2,\beta}(B_{R_0}), \; \forall R_0>0.$$

从而,我们得到下面的定理。

定理 5.5 设 (5.80) ~ (5.82) 成立。则存在 $v(\cdot) \in W^{2,p}_{loc}(\boldsymbol{R}^n) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ ($\forall 1<p<\infty$),满足(5.79)式,且

$$|v(\cdot)|_{L^\infty(R^n)} \leqslant \frac{1}{\lambda}|H(\cdot,0)|_{L^\infty(R^n)}. \tag{5.90}$$

第二章 动态规划方法与最优性原理

本章中，将引入 Bellman 的动态规划方法和最优性原理。由于所提及的方法和原理均是为了解决最优控制问题而提出来并逐步发展完善的。因此，我们将从经典的控制问题谈起。同时，也将介绍在其他一些问题中的相应理论表现形式，例如二人零和微分对策、最优转换与脉冲控制等问题。

§1 经典最优控制问题

先看一个例子。

设某家商店经销某种商品。令 $x\in\mathbf{R}$ 为这种商品在商店里的储备量，则它是时间 t 的函数。假定这种商品按一定的速度销售出去，且按一定的速度进货，则商品储量满足下述方程

$$\dot{x}(t)=-s(t)+u(t). \tag{1.1}$$

此处，$s(t)$为销售速度（它是非负的），而 $u(t)$为进货速度（它也是非负的）。假定作为商店经理，他无法改变 $s(t)$，但可以改变 $u(t)$。在销售过程中，商店的获利可按下述方式来计算。首先，储备量总满足（设初始时刻为 $t=0$）

$$x(t)\geqslant 0,\ \forall t\geqslant 0. \tag{1.2}$$

其次，批发进货有一个起码数。因此，可以认为进货速度或为0，或有起码数，设为 $\alpha>0$。另外，商店仓库容量有个上界，设为 $\beta>0$。因此，有约束

$$0 \leqslant x(t) \leqslant \beta, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$u(t) \in \{0\} \cup [\alpha, \infty), \ \forall t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

而在时间区间$[0, T]$中的销售量为

$$\int_0^T s(t)[x(t)]^+ \mathrm{d}t.$$

此处，$[x]^+ = \max\{0, x\}$。上式的意义是：当$x(t) > 0$时，按速度$s(t)$销售．而当$x(t) = 0$时，无货可售，故销售速度为0，今再设零售价为每单位a元，则销售收入为

$$\int_0^T as(t)[x(t)]^+ \mathrm{d}t.$$

若设批发价为每单位b元，商店仓库储备的花费为每单位时间c元，则支出为

$$\int_0^T [bu(t) + cx(t)] \mathrm{d}t.$$

因此，收支相抵，总盈利为

$$J = \int_0^T \{as(t)[x(t)]^+ - bu(t) - cx(t)\} \mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

作为商店经理，希望寻找适当的$u(t)$，使得泛函(1.5)式达到最大，又使(1.3)和(1.4)均得到满足。这就是一个典型的最优控制问题．

在现实生活中，最优控制的例子是非常多的。可以这么说，凡是人为因素可以影响其发展的任何过程或现象，均存在最优控制问题。可想而知，最优控制问题几乎是无处不在的。值得注意的是，各种最优控制问题的表述形式尽管可以千差万别，但总离不开两个要素，一个是所谓的状态方程及约束，另一个是所谓的性能指标。我们所指的经典最优控制问题是指其状态方程是一个常微分方程（组），而其性能指标是 Mayer 型、Lagrange 型或 Bolza 型的。下面，给出一般的

(连续时间)经典最优控制问题的提法。

设 $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维欧氏空间,任何 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 称为状态变量,而 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中的向量 u 称为控制变量。令 $X\subset\boldsymbol{R}^n$, $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$, $U\subset\boldsymbol{R}^m$, 它们分别称为状态约束集、端点约束集和控制约束集。设 f: $[0, T]\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$, f^0: $[0, T]\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$, h: $X\to\boldsymbol{R}$ 为给定的函数。定义下述方程为受控系统的状态方程:

$$\dot{y}(t)=f(t, y(t), u(t)),\ t\in[0, T]. \tag{1.6}$$

而其中的

$$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, T]\equiv\{u(\cdot): [0, T]\to U,\ u(\cdot)\text{ 是可测的}\}.$$

我们常称上述的 $u(\cdot)$ 为控制函数,称满足(1.6)式的$y(\cdot)$为系统的一条轨线。

定义 1.1 称 $(y(\cdot), u(\cdot))\in C([0, T];\boldsymbol{R}^n)\times\mathscr{U}[0, T]$ 为一个容许对,如果(1.6)式满足,且端点约束

$$(y(0), y(T))\in\Omega, \tag{1.7}$$

以及状态约束

$$y(t)\in X,\quad \forall t\in[0, T] \tag{1.8}$$

均满足,又使得

$$f^0(\cdot, y(\cdot), u(\cdot))\in L^1(0, T). \tag{1.9}$$

此时,称 $y(\cdot)$和 $u(\cdot)$分别为容许轨线和容许控制。

记$\mathscr{A}$为容许对全体。今定义性能指标为

$$J(y(\cdot), u(\cdot))=\int_0^T f^0(t, y(t), u(t))\mathrm{d}t+h(y(T)),$$

$$\forall (y(\cdot), u(\cdot))\in\mathscr{A}. \tag{1.10}$$

我们的最优控制问题可叙述如下:

问题 C。寻找 $(y^*(\cdot), u^*(\cdot))\in\mathscr{A}$, 使得

$$J(y^*(\cdot), u^*(\cdot))=\inf_{\mathscr{A}}J(y(\cdot), u(\cdot)), \tag{1.11}$$

若上述的$(y^*(\cdot),u^*(\cdot))$存在，分别称$y^*(\cdot)$、$u^*(\cdot)$和$(y^*(\cdot), u^*(\cdot))$为最优轨线、最优控制和最优对。

值得注意的是，当所涉及的问题中要求泛函的最大值时(如前面的例子)，可将泛函乘以(-1)，然后求最小值。显见，所得的问题是与原问题等价的。

当(1.10)式中 $f^0\equiv 0$ 时，问题 C 常称作 Mayer 问题，$h\equiv 0$ 时常称为 Lagrange 问题，而两者均非恒为0时，常称为 Bolza 问题。这些名词来源于古典变分学。

在以后的讨论中，总设

$$\begin{cases} X=\boldsymbol{R}^n, \\ \Omega=\{x_0\}\times\boldsymbol{R}^n, \end{cases} \tag{1.12}$$

即没有状态约束和终端约束。这并不是为了方便，而是对于一般的具有状态约束和终端约束的问题，人们还不知道如何利用动态规划方法来严格地处理问题 C。因此，从现在开始，将不加说明地假设 (1.12) 式。对于其它别的最优控制问题，也将假设无状态约束和终端约束。

我们注意到，问题 C 是在一个有限时间区间 $[0, T]$ 上来考虑的。有些时候，人们还希望考虑无限时间区间上的问题。对于这样的问题，我们常常遇到的是定常系统和指标，即函数 f 和 f^0 均不依赖于 t。此时，将会得到一些与非定常问题(即问题 C)不同的一些结果。我们将叙述一下无限区间上的定常控制问题。

设 $f: \boldsymbol{R}^n\times U\to\boldsymbol{R}^n$, $f^0: \boldsymbol{R}^n\times U\to\boldsymbol{R}$, $\lambda>0$。定义系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=f(y(t), u(t)), \text{ a. e. } t\in[0, \infty), \\ y(0)=x. \end{cases} \tag{1.13}$$

其中，仍有$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)=\{u(\cdot): [0,\infty)\to U,\ u(\cdot)\text{可测}\}$。

定义性能指标为

$$\tilde{J}(y(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f^0(y(t), u(t))\mathrm{d}t. \quad (1.14)$$

此处，λ 常称为折扣因子。它的意义是，作为决策者，在制定性能指标时，更着重考虑近期的目标，因为一定时间以后，性能指标往往是要作修改的。在数学上讲，由于因子 $e^{-\lambda t}$ 的出现。当 f^0 为有界时，对任何在$[0, \infty)$ 上有定义的 $y(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$(当然至少要使 $f^0(y(\cdot), u(\cdot))$可测)，(1.14)式总是有定义的。这给许多数学上的处理带来方便。若我们记 $\tilde{\mathscr{A}}$ 为全体 $(y(\cdot), u(\cdot)) \in W^{1,1}_{loc}([0, \infty); \boldsymbol{R}^n) \times \mathscr{U}[0, \infty)$，满足(1.13)式，此处，

$$W^{1,1}_{loc}([0, \infty); \boldsymbol{R}^n) = \{y(\cdot) \in W^{1,1}([0, T]; \boldsymbol{R}^n), \\ \forall T > 0\}.$$

则无限时区定常最优控制问题可以表述如下：

问题 C′. 寻找 $(y^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \tilde{\mathscr{A}}$，使得

$$\tilde{J}(y^*(\cdot), u^*(\cdot)) = \inf_{\tilde{\mathscr{A}}} \tilde{J}(y(\cdot), u(\cdot)). \quad (1.15)$$

§2 最优性原理、值函数与 HJB 方程

本节将详细叙述 Bellman 的动态规划方法。利用此方法，将深入研究一般的无终端约束、无状态约束的(连续时间)经典最优控制问题。将证明对于该问题，最优性原理成立，并由此形式地导出值函数满足的 Hamitton-Jacobi-Bellman 方程(简称 HJB 方程)。然后，再由值函数构造出最优控制来(形式地)。从而，在理论上，解决问题 C。

现在，考察问题 C(注意条件 (1.12))。下面采用的方法就是所谓的动态规划方法。

任取 $t\in[0,T)$，$x\in\mathbf{R}^n$，考虑下述系统

$$\begin{cases}\dot y(s)=f(s,y(s),u(s)), \text{ a. e. } s\in[t,T],\\ y(t)=x.\end{cases} \tag{2.1}$$

此处，$f:[0,T]\times\mathbf{R}^n\times U\to\mathbf{R}^n$，$U\subseteq\mathbf{R}^m$ 为一个 Lebesgue 可测集，而

$u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]\equiv\{u(\cdot):[t,T]\to U_0,\ u(\cdot)\text{可测}\}$.

另外还有映照 $f^0:[0,T]\times\mathbf{R}^n\times U\to\mathbf{R}$，$h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$。对于映照 f、f^0 和 h，作如下假设：

(H1)映照 f，f^0 和 h 均是连续的，且存在常数 $L>0$，以及连续函数 $\omega:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+(\mathbf{R}^+\equiv[0,\infty))$，它关于其每个变量均单调增加，满足 $\omega(r,0)=0$，$\forall r\geqslant0$，使得下述成立：$\forall t$，$\hat t\in[0,T]$，x，$\hat x\in\mathbf{R}^n$，$u\in U$，

$$\begin{cases}\|f(t,x,u)-f(\hat t,\hat x,u)\|\leqslant L\|x-\hat x\|\\ \qquad+\omega(\|x\|\vee\|\hat x\|,|t-\hat t|),\\ \|f(t,x,u)\|\leqslant L(1+\|x\|).\end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases}|f^0(t,x,u)-f^0(\hat t,\hat x,u)|\\ \quad\leqslant\omega(\|x\|\vee\|\hat x\|,\|x-\hat x\|+|t-\hat t|), \quad (2.3)\\ |h(x)-h(\hat x)|\leqslant\omega(\|x\|\vee\|\hat x\|,\|x-\hat x\|).\\ |f^0(t,0,u)|,\ |h(0)|\leqslant L. \quad (2.4)\end{cases}$$

此处，$\|x\|\vee\|\hat x\|=\max\{\|x\|,\|\hat x\|\}$.

注意到，(2.2)和(2.3)式中取相同的常数 L 完全是为了方便。不同的 L 只带来记号上的繁琐。另外，由 (2.3) 式可知，f^0 关于 x 的连续性是很弱的，该条件仅相当于 f^0 在 $\mathbf{R}^n$ 的有界集上一致连续，且此连续性关于 $t\in[0,T]$，$u\in U$ 是一致的。特别地，若 f^0 关于 x 是局部 Lipschitz 或 Hölder 连续的(关于$(t,u)\in[0,T]\times U$ 一致)，则(2.3)式中关于 f^0 的条件满足。

引理 2.1 设 $f: [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times U \to \boldsymbol{R}^n$ 连续，则对任何的 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, T]$，函数 $t \to f(t, x, u(t))$，是可测的（对固定 $x \in \boldsymbol{R}^n$）。

证 由于 $u(\cdot)$ 是可测的，故可以找到简单函数列

$$u_k(\cdot) = \sum_{i \geq 1} a_i^k \chi_{E_i^k}(\cdot), \ a_i^k \in U, \ E_i^k \in \mathscr{L}[0, T],$$

使得

$$\lim_{k \to \infty} u_k(t) = u(t), \quad \text{a. e. } t \in [0, T].$$

而 f 关于 u 是连续的，故

$$\lim_{k \to \infty} f(t, x, u_k(t)) = f(t, x, u(t)), \quad \text{a. e. } t \in [0, T].$$

另一方面，

$$f(t, x, u_k(t)) = \sum_{i \geq 1} f(t, x, a_i^k) \chi_{E_i^k}(t) \quad t \in [0, T]$$

为一个可测函数，因此，$t \to f(t, x, u(t))$ 是可测的。

根据此引理，对任何给定的 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, T]$，函数 $f(t, x, u(t))$ 满足第一章 §2 中的条件(i)～(ii)。从而，由第一章定理 2.4 知，对任何的 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[t, T]$ 以及 $x \in \boldsymbol{R}^n$，(2.1)式存在唯一的解，记作 $y_{t,x}(\cdot) \equiv y_{t,x}(\cdot; u(\cdot))$。然后，定义性能指标为：

$$J_{t,x}(u(\cdot)) = \int_t^T f^0(\tau, y_{t,x}(\tau; u(\cdot)), u(\tau)) d\tau + h(y_{t,x}(T)). \tag{2.5}$$

类似于引理 2.1，我们知道 $t \mapsto f^0(t, x, u(t))$ 是可测的。因此，可知 $\tau \mapsto f^0(\tau, y_{t,x}(\tau; u(\cdot)), u(\cdot))$ 是可测的，再由条件(2.4)知它还是有界的。从而，(2.5)式右端是有意义的。因此，我们可以提出下述的最优控制问题：

问题 $\tilde{\text{C}}$ 对任何给定的 $(t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$，寻找 $u^*(\cdot) \in \mathscr{U}[t, T]$，使得

$$J_{t,x}(u^*(\cdot)) = \inf_{\mathscr{U}[t,T]} J_{t,x}(u(\cdot)). \tag{2.6}$$

需要注意的是,在§1中,没有假设f满足Lipschitz条件及线性增长性条件(即(2.2)式),故对任何给定的$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$,可能(1.6)～(1.8)没有解或有多个解。因此$y(\cdot)$和$u(\cdot)$只能成对出现(称为容许对)。从而(1.10)式左端写成$J(y(\cdot), u(\cdot))$。而在本节中,由于条件(2.2)的假设,并且没有状态约束和终端约束,故容许对$(x(\cdot), u(\cdot))$可由容许控制$u(\cdot)$唯一确定,而此时的容许控制为全体$\mathscr{U}[t,T]$。因此,(2.5)式中不需要写成$J_{t,x}(y_{t,x}(\cdot), u(\cdot))$。需要当心的是:当状态约束或终端约束出现时,或更一般地,容许对$(y(\cdot), u(\cdot))$必须成对出现时,动态规划方法是否还有效是一个未解决的问题。

容易知道,在(H1)假定下,问题C是问题$\widetilde{C}$的一个"子问题"。事实上,在问题$\widetilde{C}$中,取$(t,x)=(0,x_0)$,即得问题C。因此,也可以说,将问题C"嵌入"了问题$\widetilde{C}$。通过"整体"地(关于时间t而言)研究问题$\widetilde{C}$,从而得到问题C的解的方法就是动态规划方法。

现在,定义问题$\widetilde{C}$的值函数如下:

$$\begin{cases} v(t,x) = \inf\limits_{\mathscr{U}[t,T]} J_{t,x}(u(\cdot)), & \forall (t,x)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n, \\ v(T,x) = h(x), \ \forall x\in\boldsymbol{R}^n. \end{cases} \tag{2.7}$$

在动态规划方法中,值函数起着中心的作用。我们将会看到,对值函数的研究将会提供一条寻找最优控制的途径。下面的命题给出了值函数的一些基本性质。

命题 2.2 *存在连续函数$\overline{C}$: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$和$\overline{\omega}$: $\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$,$\overline{\omega}$关于每个变量均单调增加,且$\overline{\omega}(r,0)=0$, $\forall r\geq 0$,使*

得

$$|v(t,x)|\leqslant\overline{C}(\|x\|),\quad\forall(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n,\tag{2.8}$$

$$|v(t,x)-v(\hat{t},\hat{x})|\leqslant\bar{\omega}(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|+|t-\hat{t}|),$$

$$\forall t,\hat{t}\in[0,T),\ x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n.\tag{2.9}$$

证 首先，由条件(2.2)及第一章命题2.6知，$\forall t,\hat{t}\in[0,T]$，$x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$，

$$\begin{cases}\|y_{t,x}(s)\|\leqslant(1+\|x\|)e^{L(s-t)}, & s\in[t,T],\\ \|y_{t,x}(s)-y_{t,\hat{x}}(s)\|\leqslant\|x-\hat{x}\|e^{L(s-t)}, & s\in[\hat{t},T],\\ \|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant L(1+\|x\|)e^{L(s-t\wedge\hat{t})}|t-\hat{t}|, & \\ & s\in[t\vee\hat{t},T].\end{cases}\tag{2.10}$$

于是，$\forall u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$，

$$\begin{aligned}&|J_{t,x}(u(\cdot))-J_{t,\hat{x}}(u(\cdot))|\\ &\leqslant\int_t^T|f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),u(\tau))-f^0(\tau,y_{t,\hat{x}}(\tau),u(\tau))|\mathrm{d}\tau\\ &\quad+|h(y_{t,x}(T))-h(y_{t,\hat{x}}(T))| \qquad\qquad (2.11)\\ &\leqslant\int_t^T\omega(\|y_{t,x}(\tau)\|\vee\|y_{t,\hat{x}}(\tau)\|,\ \|y_{t,x}(\tau)-y_{t,\hat{x}}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau\\ &\quad+\omega(\|y_{t,x}(T)\|\vee\|y_{t,\hat{x}}(T)\|,\ \|y_{t,x}(T)-y_{t,\hat{x}}(T)\|)\\ &\leqslant(1+T)\omega(e^{LT}(1+\|x\|\vee\|\hat{x}\|),\ e^{LT}\|x-\hat{x}\|)\end{aligned}$$

因此，关于$u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$取下确界，可得

$$|v(t,x)-v(t,\hat{x})|\leqslant\omega_1(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|),$$

$$\forall t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n,\tag{2.12}$$

此处，

$$\omega_1(r,\sigma)=(1+T)\omega(e^{LT}(1+r),\ e^{LT}\sigma),\ r,\sigma\geqslant0.\tag{2.13}$$

由(2.11)式推出(2.12)式可以用严格的ε-δ语言来叙述。将它留给有兴趣的读者去完成。将见到(2.12)式是(2.9)式的一半。

类似地，有（注意条件(2.3)～(2.4)）。

$$
\begin{aligned}
|J_{t,x}(u(\cdot))| &\leqslant \int_t^T |f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau))| \mathrm{d}\tau \\
&\quad + |h(y_{t,x}(T))| \\
&\leqslant \int_t^T [L + \omega(\|y_{t,x}(\tau)\|, \|y_{t,x}(\tau)\|)] \mathrm{d}\tau \\
&\quad + L + \omega(\|y_{t,x}(T)\|, \|y_{t,x}(T)\|) \qquad (2.14) \\
&\leqslant (1+T)[L + \omega(e^{LT}(1+\|x\|), e^{LT}(1+\|x\|)) \\
&\triangleq \overline{C}(\|x\|).
\end{aligned}
$$

从而，关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[t, T]$ 取下确界，可得到(2.8)式。

我们再设 $0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T$，则对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[\hat{t}, T]$，任意可测地延拓 $u(\cdot)$，使之成为 $\mathscr{U}[t, T]$ 中元素，则有

$$
\begin{aligned}
v(t, x) &\leqslant J_{t,x}(u(\cdot)) \\
&= \int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau)) \mathrm{d}\tau + J_{\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})}(u(\cdot)) \\
&\leqslant \overline{C}(\|x\|)(\hat{t} - t) + J_{\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})}(u(\cdot)).
\end{aligned}
$$

两边关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[\hat{t}, T]$ 取下确界，可得（注意(2.10)，(2.12)及(2.14)式）

$$
\begin{aligned}
v(t, x) &\leqslant \overline{C}(\|x\|)(\hat{t} - t) + v(\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})). \\
&\leqslant v(\hat{t}, x) + \overline{C}(\|x\|)(\hat{t} - t) \\
&\quad + \omega_1(\|x\| \vee \|y_{t,x}(\hat{t})\|, \|y_{t,x}(\hat{t}) - x\|) \\
&\leqslant v(\hat{t}, x) + \overline{C}(\|x\|)(\hat{t} - t) \qquad (2.15) \\
&\quad + \omega_1(e^{LT}(1+\|x\|), L(1+\|x\|)e^{LT}|\hat{t} - t|) \\
&\equiv v(\hat{t}, x) + \omega_2(\|x\|, |\hat{t} - t|).
\end{aligned}
$$

此处，

$$
\omega_2(r, \sigma) = \overline{C}(r)\sigma + \omega_1(e^{LT}(1+r), L(1+r)e^{LT}\sigma), \quad r, \sigma \geqslant 0. \qquad (2.16)
$$

另一方面，对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[t, T]$，易知 $u(\cdot)|_{[\hat{t}, T]}\in\mathscr{U}[\hat{t},$

$T]$。此处，$u(\cdot)|_{[\hat{t},T]}$表示$u(\cdot)$在$[\hat{t}, T]$上的限制。因此，

$$\begin{aligned}
&J_{t,x}(u(\cdot))\\
&\geqslant \int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau + J_{\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})}(u(\cdot))\\
&\geqslant -\overline{C}(\|x\|)(\hat{t}-t) + v(\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t}))\\
&= v(\hat{t}, x) - \omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|).
\end{aligned}$$

然后，关于$u(\cdot)\in\mathscr{U}[t, T]$取下确界，得到

$$v(t, x) \geqslant v(\hat{t}, x) - \omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|). \tag{2.17}$$

与(2.15)式综合，可得

$$|v(t, x) - v(\hat{t}, x)| \leqslant \omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|). \tag{2.18}$$

因此，若取

$$\bar{\omega}(r, \sigma) = \omega_1(r, \sigma) + \omega_2(r, \sigma), \ r, \sigma \geqslant 0,$$

则立即可知(2.12)式和(2.18)式蕴含(2.9)式。

下面的结果实际上就是值函数应满足的一个必要条件。

定理 2.3 （最优性原理） 对任何$(t, x)\in[0, T)\times\boldsymbol{R}^n$，以及$s\in[t, T]$，下述等式成立：

$$v(t, x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,s]} \left\{ \int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau + v(s, y_{t,x}(s)) \right\}. \tag{2.19}$$

上式中的$y_{t,x}(\cdot) = y_{t,x}(\cdot; u(\cdot))$。

证 暂记(2.19)式的右端为w。首先，任取$u(\cdot)\in\mathscr{U}[t, T]$。由值函数的定义知

$$\begin{aligned}
v(t, x) &\leqslant J_{t,x}(u(\cdot))\\
&= \int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau + J_{s, y_{t,x}(s)}(u(\cdot)).
\end{aligned}$$

因此，关于$u(\cdot)\in\mathscr{U}[s, T]$取下确界，得

$$v(t, x) \leqslant \int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau + v(s, y_{t,x}(s)).$$

然后，再关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[t, s]$ 取下确界，得到

$$v(t, x)\leqslant w. \tag{2.20}$$

反之，对任何 $\varepsilon>0$，由 $v(t, x)$ 的定义知，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}[t, T]$，使得

$$\begin{aligned}
&v(t, x)+\varepsilon\geqslant J_{t,x}(u^\varepsilon(\cdot))\\
&=\int_t^T f^0(\tau, y^\varepsilon_{t,x}(\tau), u^\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y^\varepsilon_{t,x}(T))\\
&=\int_t^s f^0(\tau, y^\varepsilon_{t,x}(\tau), u^\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau+J_{s,y^\varepsilon_{t,x}(s)}(u^\varepsilon(\cdot)) \qquad (2.21)\\
&\geqslant\int_t^s f^0(\tau, y^\varepsilon_{t,x}(\tau), u^\varepsilon(\tau))\mathrm{d}\tau+v(s, y^\varepsilon_{t,x}(s))\\
&\geqslant\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,s]}\left\{\int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau+v(s, y_{t,x}(s))\right\}\\
&\equiv w.
\end{aligned}$$

上式中，$y^\varepsilon_{t,x}(\cdot)\equiv y_{t,x}(\cdot\,; u^\varepsilon(\cdot))$。由于 $\varepsilon>0$ 为任意的，故知

$$v(t, x)\geqslant w. \tag{2.22}$$

因此，综合(2.20)式和(2.22)式，我们有

$$v(t, x)=w. \tag{2.23}$$

这便证得了(2.19)式。

现在，再来看一看下面的事实。设 $(t, x)\in[0, T)\times\boldsymbol{R}^n$ 给定，$\bar{u}(\cdot)\in\mathscr{U}[t, T]$ 为对应于 (t,x) 的最优控制而 $\bar{y}_{t,x}(\cdot)$ 为相应的最优轨线。则由定理 2.3 知，$\forall s\in[t, T]$，

$$\begin{aligned}
&v(t, x)=J_{t,x}(\bar{u}(\cdot))\\
&=\int_t^s f^0(\tau, \bar{y}_{t,x}(\tau), \bar{u}(\tau))\mathrm{d}\tau+J_{s,\bar{y}_{t,x}(s)}(\bar{u}(\cdot))\\
&\geqslant\int_t^s f^0(\tau, \bar{y}_{t,x}(\tau), \bar{u}(\tau))\mathrm{d}\tau+v(s, \bar{y}_{t,x}(s)) \qquad (2.24)\\
&\geqslant\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,s]}\left\{\int_t^s f^0(\tau, \bar{y}_{t,x}(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau+v(s, \bar{y}_{t,x}(s))\right\}
\end{aligned}$$

$= v(t, x)$。

因此，中间的等号成立，即有

$$J_{s, \bar{y}_{t,x}(s)}(\bar{u}(\cdot)) = v(s, \bar{y}_{t,x}(s)). \qquad (2.25)$$

这说明，当 $\bar{u}(\cdot)$ 为 $[t, T]$ 上以 x 为初值的问题的最优控制时，$\bar{u}(\cdot)|_{[s,T]}$ 必为 $[s, T]$ 上以 $y(s; t, x, \bar{u}(\cdot))$ 为初值的问题的最优控制。这也就是说"整体最优必是局部最优的。"这也恰恰是绪论中叙述的最优性原理的具体含义。

上面的定理告诉我们，值函数 $v(t, x)$ 满足形如(2.19)的方程。显然，这样的方程几乎是没有办法求解的。因此，我们期望由此能够导出形式较简单的关于 $v(\cdot, \cdot)$ 的方程。

定理 2.4 (Hamilton-Jacobi-Bellman 方程) 设值函数 $v(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times \boldsymbol{R}^n)$，则它满足下述的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程：

$$\begin{cases} v_t(t, x) + H(t, x, v_x(t, x)) = 0, \\ \qquad (t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n, \\ v(T, x) = h(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^n. \end{cases} \qquad (2.26)$$

其中

$$H(t, x, p) = \inf_{u \in U} \{(p, f(t, x, u)) + f^0(t, x, u)\}, \qquad (2.27)$$

$$\forall (t, x, p) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n.$$

(函数 $H(t, x, p)$ 常被称为 Hamilton 函数，它是关于 (t, x, p) 连续的)。

证 首先，任意取定 $u_0 \in U$，而定义常值控制 $u_0(t) \equiv u_0$。则由(2.19)式知，对任何 $s \in (t, T]$，有

$$v(t, x) \leqslant \int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u_0) \mathrm{d}\tau + v(s, y_{t,x}(s))$$

从而，

$$0 \leqslant \frac{1}{s-t}\int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u_0)\mathrm{d}\tau$$

$$+\frac{v(s, y_{t,x}(s)) - v(t, x)}{s-t}$$

$$\to f^0(t, x, u_0) + v_t(t, x)$$

$$+ (v_x(t,x), f(t, x, u_0)), \quad (s \downarrow t \text{时}).$$

因此，关于 $u_0 \in U$ 取下确界，可得

$$0 \leqslant v_t(t, x) + H(t, x, v_x(t, x)). \tag{2.28}$$

另一方面，对于任何的 $\varepsilon>0$ 及 $s>t$，存在 $u_{\varepsilon,s}(\cdot)\in \mathscr{U}[t, s]$，使得(注意(2.19)式)

$$v(t, x) + \varepsilon(s-t)$$

$$\geqslant \int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u_{\varepsilon,s}(\tau))\mathrm{d}\tau + v(s, y_{t,x}(s)).$$

从而

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{s-t}\int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u_{\varepsilon,s}(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$+\frac{v(s, y_{t,x}(s)) - v(t, x)}{s-t}$$

$$= \frac{1}{s-t}\int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u_{\varepsilon,s}(\tau))\mathrm{d}\tau + v_t(t, x)$$

$$+ \left(v_x(t, x), \frac{1}{s-t}\int_t^s f(\tau, y_{t,x}(\tau), u_{\varepsilon,s}(\tau))\mathrm{d}\tau\right)$$

$$+\frac{1}{s-t}o(|s-t| + \|y_{t,x}(s) - x\|)$$

$$\geqslant \frac{1}{s-t}\int_t^s H(\tau, y_{t,x}(\tau), v_x(t, x))\mathrm{d}\tau + v_t(t, x)$$

$$+\frac{1}{s-t}o(|s-t| + L(1+\|x\|)e^{LT}|s-t|)$$

$$= \frac{1}{s-t}\int_t^s H(\tau, y_{t,x}(\tau), v_x(t, x))\mathrm{d}\tau$$

$$+ v_t(t, x) + o(1).$$

此处的 $o(1)$ 是不依赖于 ε 的。由条件(2.2)及(2.3)知，函数 $H(t, x, p)$ 是连续的。因此，在上式中先令 $s \downarrow t$，再令 $\varepsilon \downarrow 0$，可得

$$0 \geqslant v_t(t, x) + H(t, x, v_x(t, x)). \tag{2.29}$$

综合(2.28)式与(2.29)式，得证定理。

(2.26) 中的方程是一个一阶偏微分方程。直观地看，它要比(2.19)式简单一些。人们最初研究方程(2.26)的目的就是为了寻找原来控制问题的最优反馈控制。现在，形式地来推导一下这个过程。

假设函数 $v(t, x)$ 已找到，满足方程(2.26)，且足够光滑。令 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0, T]$，使得(注意(2.27)式)

$$\begin{aligned} & f^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) + (v_x(t, \bar{y}(t)), f(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))) \\ & = H(t, \bar{y}(t), v_x)t, \bar{y}(t))), \qquad \text{a. e. } t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.30}$$

此处，$\bar{y}(\cdot)$ 为对应于控制 $\bar{u}(\cdot)$、初始时刻 $t=0$ 及初始状态 x_0 的轨线。因此，$\bar{u}(\cdot)$ 是一种反馈形式。下面会进一步分析此点。假设上述的 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 已构造好。我们要说明这样得到的 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 是问题 C 的一个最优对。事实上，若注意到(2.26)式，便有

$$\begin{cases} v_t(t, \bar{y}(t)) + H(t, \bar{y}(t), v_x(t, \bar{y}(t))) = 0, \\ v(T, \bar{y}(T)) = h(\bar{y}(T)). \end{cases} \tag{2.31}$$

因此，

$$\begin{aligned} & v(T, \bar{y}(T)) - v(0, x_0) \\ & = \int_0^T [v_t(t, \bar{y}(t)) + (v_x(t, \bar{y}(t)), f(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)))] \mathrm{d}t \\ & = \int_0^T \{v_t(t, \bar{y}(t)) + H(t, \bar{y}(t), v_x(t, \bar{y}(t))) \\ & \quad - f^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))\} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= -\int_0^T f^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))\mathrm{d}t.$$

从而，知

$$v(0, x_0) = \int_0^T f^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))\mathrm{d}t + h(\bar{y}(T))$$
$$= J_{0,x_0}(\bar{u}(\cdot)).$$

因此，$(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$是最优的。

现在，再回到(2.30)式。假设 f^0 与 f 关于 u 是连续可微的，且 $U = \mathbf{R}^m$，则必有

$$f_u^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) + f_u(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))^* v_x(t, y(t)) = 0. \tag{2.32}$$

这便是 $\bar{u}(\cdot)$满足的方程。所以，若进一步有

$$\begin{cases} f^0(t, x, u) = \dfrac{1}{2}[(Qx, x) + (Ru, u)], \\ f(t, x, u) = Ax + Bu. \end{cases} \tag{2.33}$$

此处，Q, R, A, B 为适当阶数的矩阵，且 Q, R 为对称阵，则(2.32)式变为

$$R\bar{u}(t) + B^* v_x(t, \bar{y}(t)) = 0,$$

故当 R 为可逆矩阵时，还有

$$\bar{u}(t) = -R^{-1}B^* v_x(t, \bar{y}(t)), \ t \in [0, T]. \tag{2.34}$$

当控制可表示为状态的函数时，称该控制为一个状态反馈控制。因此，上式中的 $\bar{u}(\cdot)$ 是一个最优状态反馈控制。在工程上，人们总是希望所考虑的问题的最优控制具有状态反馈形式。而上述的动态规划方法及 Hamilton Jacobi-Bellman方程在形式上给出了寻求这样的最优反馈控制的一种途径。因此，这种理论自诞生之日起，就一直受到工程界的重视。然而，我们也已见到，上述的推导过程包括定理 2.4 的证明均基于值函数 $v(t, x)$ 的足够光滑性(至少 C^1)。在命题 2.2 中仅

仅得到了 $v(t, x)$的连续性。事实上，一般情况下，$v(t, x)$常常不是 C^1 的。另外，方程(2.26) 也可以证明未必总有古典解。因此，整个理论到此为止尚缺乏数学上的严格化。正因为如此，这种理论在较长一段时间里，没能被数学家和应用数学家们所接受。我们将在下一章中介绍 M. G. Crandall 和 P. L. Lions 建立的关于 HJB 方程的粘性解理论。这个理论将会使动态规划方法在数学上得到进一步完善。

现在，简单地讨论一下无限时区的定常控制问题——问题 C′。为此，先作一些假设(试比较(H1))

(H1)′ 设映照 $f: \boldsymbol{R}^n \times U \to \boldsymbol{R}^n$ 和 $f^0: \boldsymbol{R}^n \times U \to \boldsymbol{R}$ 均是连续的，且存在常数 $L, L_0, r \geqslant 0, 0 < \delta \leqslant 1$，使得下述成立：

$$\|f(x, u) - f(\hat{x}, u)\| \leqslant L\|x - \hat{x}\|, \quad \forall x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n, u \in U, \tag{2.35}$$

$$\|f(x, u)\| \leqslant L + L_0\|x\|, \quad \forall (x, u) \in \boldsymbol{R}^n \times U, \tag{2.36}$$

$$|f^0(x, u) - f^0(\hat{x}, u)| \leqslant L(1 + \|x\|^r + \|\hat{x}\|^r)\|x - \hat{x}\|^\delta, \quad \forall x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n, u \in U, \tag{2.37}$$

$$|f^0(x, u)| \leqslant L(1 + \|x\|^{r+\delta}), \quad \forall (x, u) \in \boldsymbol{R}^n \times U, \tag{2.38}$$

容易知道，在(H1)′ 下，对任何的 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty)$，问题(1.13) 存在唯一的解，记作 $y_x(\cdot) \equiv y_x(\cdot; u(\cdot)) \in W^{1,1}_{loc}([0, \infty); \boldsymbol{R}^n)$。然后，记

$$J_x(u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f^0(y_x(t), u(t))\mathrm{d}t. \tag{2.39}$$

由于对于一个 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty)$，即系统对应于控制 $u(\cdot)$ 和初状态 x，(1.13)的解 $y_x(\cdot)$是唯一的，因此(2.39)式左端我们略去了 $y_x(\cdot)$ (比较(1.14)式)。为了使得(2.39)式的右端有意义，作一个假设。首先，类似于第一章命题 2.6，有：$\forall u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty)$，

$$\|y_x(t)\| \leqslant e^{L_0 t}(\|x\| + Lt), \quad \forall t \geqslant 0, x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{2.40}$$

$$\|y_x(t) - y_{\hat{x}}(t)\| \leqslant e^{Lt}\|x - \hat{x}\|, \quad \forall t \geqslant 0, x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2.41}$$

于是，由(2.38)式知

$$|f^0(y_x(t), u(t))| \leqslant L(1 + \|y_x(t)\|^{r+\delta}). \tag{2.42}$$
$$\leqslant L[1 + e^{L_0(r+\delta)t}(\|x\| + Lt)^{r+\delta}], \qquad t \geqslant 0.$$

因此，要使(2.39)式右端的积分收敛，只需假设

$$\lambda > L_0(r + \delta). \tag{2.43}$$

在剩下的这一节中，假设(2.43)式成立。然后，重新叙述问题C′。

问题 $\tilde{C}'$. 对任给的 $x \in \boldsymbol{R}^n$，寻找 $u^*(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty)$，使得

$$J_x(u^*(\cdot)) = \inf_{\mathscr{U}[0,\infty)} J_x(u(\cdot)). \tag{2.44}$$

定义该问题的值函数为

$$v(x) = \inf_{\mathscr{U}[0,\infty)} J_x(u(\cdot)). \tag{2.45}$$

类似于命题 2.2，，有下述的命题。

命题 2.5 *存在常数* $C_1 \equiv C_1\ (L, L_0, r, \delta, \lambda)$ *和* $C_2 \equiv C_2(L, L_0, r, \delta, \lambda, \eta)$，*其中* $0 < \eta < \dfrac{\lambda - L_0(r+\delta)}{L} \wedge \delta$，*使得*

$$|v(x)| \leqslant C_1(1 + \|x\|^{r+\delta}), \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{2.46}$$

$$|v(x) - v(\hat{x})| \leqslant C_2(1 + \|x\|^{r+\delta} + \|\hat{x}\|^{r+\delta})\|x - \hat{x}\|^\eta,$$
$$\forall x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2.47}$$

其证明与命题 2.2 的类似。不过在证明(2.47)式时，应该注意下述事实：$\forall \eta \in (0, \delta]$，

$$|f^0(x, u) - f^0(\hat{x}, u)| \leqslant L(1 + \|x\|^r + \|\hat{x}\|^r)\|x - \hat{x}\|^\eta,$$
$$\text{如果 } \|x - \hat{x}\| \leqslant 1,$$
$$|f^0(x, u) - f^0(\hat{x}, u)| \leqslant L(2 + \|x\|^{r+\delta} + \|\hat{x}\|^{r+\delta})\|x - \hat{x}\|^\eta,$$

$$\text{如果}\|x-\hat{x}\|\geqslant 1.$$

因此，恒有

$$|f^0(x,u)-f^0(\hat{x},u)|\leqslant L(3+\|x\|^{r+\delta}+\|\hat{x}\|^{r+\delta})\|x-\hat{x}\|^{\delta},$$

$$\forall x,\ \hat{x}\in \boldsymbol{R}^n,\ u\in U. \tag{2.48}$$

定理2.6 （**最优性原理**） 对任何的 $x\in \boldsymbol{R}^n$，以及 $t>0$，下述等式成立。

$$v(x)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,t]}\left\{\int_0^t e^{-\lambda\tau}f^0(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau+e^{-\lambda t}v(y_x(t))\right\}. \tag{2.49}$$

这个定理的证明也基本上与定理 2.3 的相同，唯一需要注意的是

$$\begin{aligned}&\int_t^{\infty}e^{-\lambda\tau}f^0(y_x(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\tau}f^0(y_x(\tau+t),u(\tau+t))\mathrm{d}\tau\cdot e^{-\lambda t}\\&=e^{-\lambda t}J_{y_x(t)}(u(\cdot+t)).\end{aligned}$$

注意到这一点，很容易得证(2.49)式，详细的证明过程留给读者去完成。

接下来，利用此定理，证明下述定理。

定理 2.7 （HJB 方程） 设值函数 $v(\cdot)\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$，则它满足下面的 HJB 方程：

$$\lambda v(x)-H(x,v_x(x))=0,\ x\in\boldsymbol{R}^n. \tag{2.50}$$

其中，

$$H(x,p)=\inf_{u\in U}\{f^0(x,u)+(p,f(x,u))\},$$

$$\forall(x,p)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n. \tag{2.51}$$

它的证明也可以参照定理 2.4 的证明，利用定理 2.6。值得注意的是，方程(2.50)不含时间 t，这恰恰吻合了定常系统不依赖时间的特性。我们将会看到，(2.50)式中 $\lambda>0$ 的存在

是至关重要的。

§3 二人零和微分对策问题

本节将讨论另一类与最优控制问题有密切关系的问题——二人零和微分对策问题．就某种意义上讲，二人零和微分对策可以看作是最优控制问题的推广。我们将同样地用动态规划方法来处理这一类问题。

现在，就让我们来叙述二人零和微分对策问题。设 $T>0$ 为一个固定正常数，设 $U\subseteq \boldsymbol{R}^p$，$W\subseteq \boldsymbol{R}^q$ 为两个给定的闭集，再令 f：$[0,T]\times \boldsymbol{R}^n\times U\times W\to \boldsymbol{R}^n$ 为一给定的映照。考虑下述受控系统：

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=f(t,y(t),u(t),w(t)),\ t\in[0,T], \\ y(0)=x. \end{cases} \tag{3.1}$$

此处，$u(\cdot)$ 和 $w(\cdot)$ 为两个控制变量分别取值于 U 和 W。相应的性能指标为

$$\begin{aligned} & J(y(\cdot),u(\cdot),w(\cdot)) \\ & =\int_0^T f^0(t,y(t),u(t),w(t))\mathrm{d}t+h(y(T)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

此处，f^0：$[0,T]\times \boldsymbol{R}^n\times U\times W\to \boldsymbol{R}$，$h$：$\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 为两个给定的函数。所谓二人零和微分对策问题即为给出上述的系统(3.1)和性能指标(3.2)式，其中，控制 $u(\cdot)$ 和 $w(\cdot)$ 分别被两个博奕者操纵。我们暂时称这两个博奕者为 U 和 W。博奕者 U 希望寻找控制 $u(\cdot)$ 使得(3.2)式极小化，而博奕者 W 企图寻找控制 $w(\cdot)$ 使得(3.2)式极大化。今若记

$$J_U(y(\cdot),u(\cdot),w(\cdot))=J(y(\cdot),u(\cdot),w(\cdot)),$$
$$J_W(y(\cdot),u(\cdot),w(\cdot))=-J(y(\cdot),u(\cdot),w(\cdot)).$$

则它们分别可以视作博奕者U和W的性能指标。这两个博奕者均希望极小化他们自己的指标。由于

$$J_U(y(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) + J_W(y(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = 0, \tag{3.3}$$

故称这样的问题为二人零和微分对策问题。容易知道，当W为一个单点集时，上述问题便退化为前二节中所讨论的最优控制问题了。因此，二人零和微分对策问题是最优控制问题的推广，而最优控制问题可以视作只有一个博奕者的微分对策问题。

为了讨论上述的微分对策问题，需要引进一些概念。首先，定义

$$\mathscr{U}[0, T] = \{u: [0, T] \to v, u(\cdot) \text{ 可测}\},$$

$$\mathscr{W}[0, T] = \{w: [0, T] \to W, w(\cdot) \text{可测}\},$$

它们分别称为博奕者U和W在$[0, T]$上的容许控制集。同理，定义$\mathscr{U}[t, s]$和$\mathscr{W}[t, s]$，$\forall 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$。下面的概念在(微分)对策理论中是至关重要的。

定义 3.1 *给定$t \in [0, T)$，称映照$\alpha: \mathscr{W}[t, T] \to \mathscr{U}[t, T]$为博奕者$U$在$[t, T]$上的一个容许策略，如果它满足下述条件：*

$$w(s) = \hat{w}(s), \text{ a.e. } s \in [t, \hat{t}] \subset [t, T], \tag{3.4}$$

可以导致

$$\alpha[w(\cdot)](s) = \alpha[\hat{w}(\cdot)](s), \quad \text{a. e. } s \in [t, \hat{t}]. \tag{3.5}$$

同理，可定义博奕者W在$[t, T]$上的策略$\beta: \mathscr{U}[t, T] \to \mathscr{W}[t, T]$。分别记博奕者$U$和$W$在$[t, T]$上的容许策略全体为$\mathscr{A}[t, T]$和$\mathscr{B}[t, T]$。

值得注意的是，策略是容许控制集之间的映照，它本身不是容许控制，而它的象是容许控制。例如对$\alpha \in \mathscr{A}[t, T]$，

则对任何容许控制$w(\cdot)\in\mathscr{W}[t, T]$，$\alpha[w(\cdot)]$是博奕者$U$的一个容许控制，它随$w(\cdot)$的改变而改变. 因此，$\alpha$本身不是一个容许控制，而是一个比容许控制高一个层次的东西. 另外，定义3.1中指出了这样一个事实：作为博奕者U的一个策略α，它服从所谓的因果性而没有预测性，即在时刻s，$\alpha[w(\cdot)](s)$的值仅依赖于$\{w(\tau); t\leqslant\tau\leqslant s\}$，这就是(3.4)式蕴含(3.5)式的含义. 这恰恰正是直观想象中的策略应满足的条件，因为在制定策略时，一般是无法预测对方将来的策略的.

现在，对(3.1)和(3.2)式中出现的函数f、f^0和h作一些假设. 设$f: [0, T]\times\boldsymbol{R}^n\times U\times W\to\boldsymbol{R}^n$，$f^0: [0, T]\times\boldsymbol{R}^n\times U\times W\to\boldsymbol{R}$和$h: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$均为连续函数，且存在常数$L>0$以及连续函数$\omega: \boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，它关于每个变量均单调增加，$\omega(r, 0)=0$，$\forall r\geqslant 0$，使得下述条件成立：$\forall t, \hat{t}\in[0, T]$，$x, \hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$u\in U$，$w\in W$，

$$\begin{aligned}&\|f(t, x, u, w)-f(\hat{t}, \hat{x}, u, w)\|\\ \leqslant\ &L\|x-\hat{x}\|+\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|, |t-\hat{t}|),\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&|f^0(t, x, u, w)-f^0(\hat{t}, \hat{x}, u, w)|\\ \leqslant\ &\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|, \|x-\hat{x}\|+|t-\hat{t}|),\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$|h(x)-h(\hat{x})|\leqslant\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|, \|x-\hat{x}\|),\tag{3.8}$$

$$\|f(t, 0, u, w)\|,\ |f^0(t, 0, u, w)|,\ |h(0)|\leqslant L.\tag{3.9}$$

容易知道(3.6)和(3.9)式中关于f的假设可以导致

$$\|f(t, x, u, w)\|\leqslant L(1+\|x\|),$$
$$\forall(t, x, u, w)\in[0, T]\times\boldsymbol{R}^n\times U\times W.\tag{3.10}$$

注意到上述假设与§2中的(H1)几乎是相同的. 因此，类似于引理2.1的证明，对于任何$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, T]$和$w(\cdot)\in\mathscr{W}[0, T]$，函数$f(t, x, u(t), w(t))$满足第一章定理2.4的

所有条件。因此，对于 $(t, x)\in[0, T)\times\mathbf{R}^n$，$\alpha\in\mathscr{A}[t, T]$和 $w(\cdot)\in\mathscr{W}[t, T]$，存在唯一的 $y_{t,x}(\cdot)\equiv y_{t,x}(\cdot; \alpha[w(\cdot)], w(\cdot))$满足（注意 $\alpha[w(\cdot)]\in\mathscr{U}[t, T]$）

$$\begin{cases}\dot{y}_{t,x}(s)=f(s, y_{t,x}(s), \alpha[w(\cdot)](s), w(s)),\\ \qquad\qquad \text{a. e. } s\in[t, T],\\ y_{t,x}(t)=x.\end{cases} \tag{3.11}$$

于是，泛函

$$\begin{aligned}&J_{t,x}(\alpha[w(\cdot)], w(\cdot))\\ =&\int_t^T f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), \alpha[w(\cdot)](\tau), w(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_{t,x}(T))\end{aligned} \tag{3.12}$$

是有定义的。令

$$V^-(t, x)=\inf_{\alpha\in\mathscr{A}[t,T]}\ \sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]} J_{t,x}(\alpha[w(\cdot)], w(\cdot)),$$
$$(t, x)\in[0, T]\times\mathbf{R}^n, \tag{3.13}$$

这个函数被称为是二人零和微分对策的下值函数。同理，对于$(t, x)\in[0, T)\times\mathbf{R}^n$，$u(\cdot)\in\mathscr{U}[t, T]$ 和 $\beta\in\mathscr{B}[t, T]$，存在唯一的 $y_{t,x}(\cdot)\equiv y_{t,x}(\cdot, u(\cdot), \beta[u(\cdot)])$满足

$$\begin{cases}\dot{y}_{t,x}(s)=f(s, y_{t,x}(s), u(s), \beta[u(\cdot)](s)),\\ \qquad\qquad \text{a. e. } s\in[t, T],\\ y_{t,x}(t)=x.\end{cases} \tag{3.14}$$

然后，定义

$$\begin{aligned}&J_{t,x}(u(\cdot), \beta[u(\cdot)])\\ =&\int_t^T f(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau), \beta[u(\cdot)](\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_{t,x}(T)).\end{aligned} \tag{3.15}$$

从而可定义

$$V^{+}(t,x)=\sup_{\beta\in\mathscr{B}[t,T]}\ \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]} J_{t,x}(u(\cdot),\beta[u(\cdot)]),$$

$$(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^{n}. \tag{3.16}$$

它被称为是二人零和微分对策的上值函数。

在上面的记号中(例如(3.12)和(3.15)式)，当 $y_{t,x}(\cdot)$ 出现时，相应的控制总可以根据上下文来确定。因此，一般不会引起混淆。

我们回过来考察一下定义下值函数的过程。在此过程中，两位博奕者的地位不是相同的。因为博奕者W在选择其控制时，没有任何关于 $u(\cdot)$的信息，而博奕者U在选择其控制时，有全部的 $w(\cdot)$以往信息。换言之，博奕者W取的仅是容许控制，而博奕者U取的则是他的容许策略。因此，博奕者U处于有利的地位。类似地，对上值函数定义过程作相应的分析。由于博奕者U是希望极小化指标而博奕者W是希望极大化指标。因此，由上面的分析可直观地猜想必成立

$$V^{-}(t,x)\leqslant V^{+}(t,x),\ \forall(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^{n}. \tag{3.17}$$

我们将会证明这一点。在二人零和微分对策理论中，人们常关心下述问题：什么时候下面等式成立，

$$V(t,x)\equiv V^{-}(t,x)=V^{+}(t,x),\ \forall(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^{n}. \tag{3.18}$$

假如 (3.18) 式成立，则称二人零和微分对策问题存在值函数 $V(t,x)$。易知，当(3.18)式成立时，前面提及的两位博奕者的地位不相同性就无所谓了。

关于二人零和微分对策问题的讨论是围绕着值函数的存在性来进行的。为了进一步的讨论，先来给出上、下值函数的一些性质。

命题 3.2 *存在连续函数* $\overline{C}$: $\boldsymbol{R}^{+}\to\boldsymbol{R}^{+}$ *和* $\overline{\omega}$: $\boldsymbol{R}^{+}\times\boldsymbol{R}^{+}\to$

$\boldsymbol{R}^+$，$\bar{\omega}$ 关于其每个变元均单调增加，且 $\bar{\omega}(r,0)=0$，$\forall r\geqslant 0$，使得对任何的 $t,\hat{t}\in[0,T]$，$x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，均有

$$|V^{\pm}(t,x)|\leqslant\bar{C}(\|x\|),\tag{3.19}$$

$$|V^{\pm}(t,x)-V^{\pm}(\hat{t},\hat{x})|\leqslant\bar{\omega}(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\|x-\hat{x}\|+|t-\hat{t}|).\tag{3.20}$$

证 完全类似于命题2.2的证明，可得到(3.19)式和下述的

$$|V^{\pm}(t,x)-V^{\pm}(t,\hat{x})|\leqslant\omega_1(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\|x-\hat{x}\|).\tag{3.21}$$

今证明 $V^-(\cdot,\cdot)$关于 t 的连续性。为此，设 $0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T$，则对任何的$(u(\cdot),w(\cdot))\in\mathscr{U}[t,T]\times\mathscr{W}[t,T]$，由第一章命题2.6知

$$\|y_{t,x}(s)-y_{\hat{t},x}(s)\|\leqslant L(1+\|x\|)e^{LT}|t-\hat{t}|,\quad\forall s\in[t,T].\tag{3.22}$$

现在，对于任何的 $\hat{\alpha}\in\mathscr{A}[\hat{t},T]$，定义 $\alpha\in\mathscr{A}[t,T]$如下：（注意$[\hat{t},T]\subseteq[t,T]$）$\forall w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]$，

$$\alpha[w(\cdot)](s)=\begin{cases}u_0, & s\in[t,\hat{t}),\\ \hat{\alpha}[w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}](s), & s\in[\hat{t},T].\end{cases}\tag{3.23}$$

此处，$u_0\in U$为一个固定点，而 $w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}$ 为 $w(\cdot)$在$[\hat{t},T]$上的限制。因此，α 是 $\hat{\alpha}$ 的一个延拓。从而，有

$$\begin{aligned}&J_{t,x}(\alpha[w(\cdot)],w(\cdot))\\&=\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),u_0,w(\tau))\mathrm{d}\tau\\&\quad+J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{\alpha}[w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}],w(\cdot)|_{[\hat{t},T]})\\&\leqslant\bar{C}(\|x\|)|\hat{t}-t|+J_{\hat{t},x}(\hat{\alpha}[w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}],w(\cdot)|_{[\hat{t},T]})\\&\quad+\omega_1(\|x\|\vee\|y_{t,x}(\hat{t})\|,\|y_{t,x}(\hat{t})-x\|)\qquad\qquad(3.24)\\&\leqslant\bar{C}(\|x\|)|\hat{t}-t|+\omega_1(e^{LT}(1+\|x\|),L(1+\|x\|)e^{LT}|\hat{t}-t|)\\&\quad+J_{\hat{t},x}(\hat{\alpha}[w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}],w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}).\end{aligned}$$

因此,关于 $w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]$取上确界,并注意到

$$\{w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}: w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]\}=\mathscr{W}[\hat{t},T], \tag{3.25}$$

可得

$$\begin{aligned}\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]} J_{t,x}(\alpha[w(\cdot)],w(\cdot)) &\leqslant \omega_2(\|x\|,|t-\hat{t}|)\\ &+ \sup_{\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]} J_{\hat{t},x}(\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)],\hat{w}(\cdot)).\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中,$\omega_2(\cdot,\cdot)$的定义与(2.16)相同。因此,再关于$\hat{\alpha}\in\mathscr{A}[\hat{t},T]$ 取下确界可知

$$V^-(t,x)\leqslant V^-(\hat{t},x)+\omega_2(\|x\|,|t-\hat{t}|). \tag{3.27}$$

反之,对任何的 $\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]$, 恒作如下延拓:

$$w(s)=\begin{cases}w_0, & s\in[t,\hat{t}),\\ \hat{w}(s), & s\in[\hat{t},T].\end{cases} \tag{3.28}$$

此处,$w_0\in W$ 为一个固定点。而对任何 $\alpha\in\mathscr{A}[t,T]$, 作其限制 $\hat{\alpha}\in\mathscr{A}[\hat{t},T]$如下:$\forall\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]$, 首先按(3.28)式作延拓得到 $w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]$, 然后定义

$$\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)](s)=\alpha[w(\cdot)](s),\quad s\in[\hat{t},T]. \tag{3.29}$$

于是, 对任何的 $\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]$, $\alpha\in\mathscr{A}[t,T]$, 令 $w(\cdot)$ 和 $\hat{\alpha}$ 分别由(3.28)和(3.29)式决定,则有(比较(3.24)式)

$$\begin{aligned}&J_{t,x}(\alpha[w(\cdot)],w(\cdot))\\ &=\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),\alpha[w(\cdot)](\tau),w_0)\mathrm{d}\tau\\ &\quad+J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)],\hat{w}(\cdot))\\ &\geqslant-\omega_2(\|x\|,|t-\hat{t}|)+J_{\hat{t},x}(\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)],\hat{w}(\cdot)).\end{aligned} \tag{3.30}$$

关于 $\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]$取上确界可得

$$\begin{aligned}&\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]} J_{t,x}(\alpha[w(\cdot)],w(\cdot))\\ &\geqslant-\omega_2(\|x\|,|t-\hat{t}|)+\sup_{\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]} J_{\hat{t},x}(\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)],\hat{w}(\cdot))\end{aligned}$$

$$\geqslant -\omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|) + V^-(\hat{t}, x). \tag{3.31}$$

由于上式对任何 $\alpha \in \mathscr{A}[t, T]$ 均成立，故对 $\alpha \in \mathscr{A}[t, T]$ 取下确界，便可得到

$$V^-(t, x) \geqslant V^-(\hat{t}, x) - \omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|). \tag{3.32}$$

从而得证所要的 $V^-(t, x)$ 关于 t 的连续性。完全对称地可以得到关于 $V^+(t, x)$ 的相同结果。从而命题得证。

上述证明的思路与命题 2.2 的证明思路是相同的。这里的关键是要搞清楚控制与策略的关系。

类似于定理 2.3，有下述的定理。

定理 3.3 （**最优性原理**） 下值函数 $V^-(t, x)$ 和上值函数 $V^+(t, x)$ 分别满足下述条件：$\forall 0 \leqslant t \leqslant \hat{t} \leqslant T$, $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} V^-(t, x) = \inf_{\alpha \in \mathscr{A}[t, T]} \sup_{w(\cdot) \in \mathscr{W}[t, T]} \Big\{ &\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), \\ &\alpha[w(\cdot)](\tau), w(\tau)) \mathrm{d}\tau \\ &+ V^-(\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})) \Big\}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} V^+(t, x) = \sup_{\beta \in \mathscr{B}[t, T]} \inf_{u(\cdot) \in \mathscr{U}[t, T]} \Big\{ &\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), \\ &u(\tau), \beta[u(\cdot)](\tau)) \mathrm{d}\tau \\ &+ V^+(\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})) \Big\}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

证 只证(3.33)式。(3.34)式的证明是类似的，我们将其留给读者。记(3.33)式的右端为 $\hat{V}(t, x)$。对任何的 $\varepsilon > 0$，存在 $\alpha_0 \in \mathscr{A}[t, T]$，使得

$$\begin{aligned} \hat{V}(t, x) + \varepsilon \geqslant \sup_{w(\cdot) \in \mathscr{W}[t, T]} \Big\{ &\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), \\ &\alpha_0[w(\cdot)](\tau), w(\tau)) \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$+V^-(\hat{t},\ y_{t,x}(\hat{t}))\Big\}. \tag{3.35}$$

而由 $V^-(\hat{t},\ y_{t,x}(\hat{t}))$的定义知，存在 $\hat{\alpha}\in\mathscr{A}[\hat{t},\ T]$($\hat{\alpha}$ 依赖于 $\hat{t}$ 和 $y_{t,x}(\hat{t})$，所以也依赖于 $\{\alpha_0[w(\cdot)](\tau),\ w(\tau):\ t\leqslant\tau\leqslant\hat{t}\}$)，使得

$$\begin{aligned}&V^-(\hat{t},\ y_{t,x}(\hat{t}))+\varepsilon\\&\geqslant\sup_{\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]}J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)],\ \hat{w}(\cdot)).\end{aligned} \tag{3.36}$$

因此，定义 $\bar{\alpha}\in\mathscr{A}[t,\ T]$如下：

$$\bar{\alpha}[w(\cdot)](s)=\begin{cases}\alpha_0[w(\cdot)](s), & s\in[t,\ \hat{t}),\\ \hat{\alpha}[w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}](s), & s\in[\hat{t},\ T],\end{cases} \tag{3.37}$$

则有

$$\begin{aligned}V^-(t,\ x)&\leqslant\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]}J_{t,x}(\bar{\alpha}[w(\cdot)],\ w(\cdot))\\&=\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]}\Big\{\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,\ y_{t,x}(\tau),\ \alpha_0[w(\cdot)](\tau),\ w(\tau))\mathrm{d}\tau\\&\quad+J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{\alpha}[w(\cdot)|_{[\hat{t},T]}],\ w(\cdot)|_{[\hat{t},T]})\Big\} \qquad (3.38)\\&\leqslant\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]}\Big\{\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,\ y_{t,x}(\tau),\ \alpha_0[w(\cdot)](\tau),\ w(\tau))\mathrm{d}\tau\\&\quad+V^-(\hat{t},\ y_{t,x}(\hat{t}))+\varepsilon\Big\}\\&\leqslant\hat{V}(t,\ x)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，得到

$$V^-(t,\ x)\leqslant\hat{V}(t,\ x). \tag{3.39}$$

另一方面，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\alpha_1\in\mathscr{A}[t,\ T]$，使得

$$V^-(t,\ x)+\varepsilon\geqslant\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]}J_{t,x}(\alpha_1[w(\cdot)],\ w(\cdot)). \tag{3.40}$$

而由 $\hat{V}(t,\ x)$的定义知

$$\hat{V}(t,\ x)\leqslant\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]}\Big\{\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,\ y_{t,x}(\tau),\ \alpha_1[w(\cdot)](\tau),$$

$$w(\tau))\mathrm{d}\tau+V^{-}(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t}))\Big\}. \tag{3.41}$$

因此存在 $w_1(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]$, 使得

$$\hat{V}(t,x)-\varepsilon\leqslant\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),\alpha_1[w_1(\cdot)](\tau),w_1(\tau))\mathrm{d}\tau+V^{-}(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})). \tag{3.42}$$

今对任何 $\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]$, 置

$$\tilde{w}(\cdot)=w_1(\cdot)\chi_{[t,\hat{t})}(\cdot)+\hat{w}(\cdot)\chi_{[\hat{t},T]}(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]. \tag{3.43}$$

定义 $\hat{\alpha}\in\mathscr{A}[\hat{t},T]$如下:(注意 $\alpha_1\in\mathscr{A}[t,T]$)

$$\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)](s)=\alpha_1[\tilde{w}(\cdot)](s),\quad \forall s\in[\hat{t},T],\ \hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]. \tag{3.44}$$

所以,$\tilde{w}(\cdot)$是 $\hat{w}(\cdot)$的延拓,$\hat{\alpha}$ 是 α_1 的限制. 于是,有

$$V^{-}(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t}))\leqslant\sup_{\hat{w}(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]}J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{\alpha}[\hat{w}(\cdot)],\hat{w}(\cdot)), \tag{3.45}$$

从而,又可找到 $\hat{w}_1(\cdot)\in\mathscr{W}[\hat{t},T]$, 使得

$$V^{-}(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t}))\leqslant J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{\alpha}[\hat{w}_1(\cdot)],\hat{w}_1(\cdot))+\varepsilon. \tag{3.46}$$

今再令

$$\tilde{w}_1(\cdot)=w_1(\cdot)\chi_{[t,\hat{t})}(\cdot)+\hat{w}_1(\cdot)\chi_{[\hat{t},T]}(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T], \tag{3.47}$$

则可得(见(3.42)、(3.46)和(3.40)式)。

$$\begin{aligned}\hat{V}(t,x)-\varepsilon&\leqslant\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),\alpha_1[w_1(\cdot)](\tau),w_1(\tau))\mathrm{d}\tau\\&\quad+J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{\alpha}[\hat{w}_1(\cdot)],\hat{w}_1(\cdot))+\varepsilon\\&=J_{t,x}(\alpha_1[\tilde{w}_1(\cdot)],\tilde{w}_1(\cdot))+\varepsilon \qquad (3.48)\\&\leqslant V^{-}(t,x)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

再由 $\varepsilon>0$ 的任意性，得到

$$\hat{V}(t, x) \leqslant V^{-}(t, x). \tag{3.49}$$

上式与(3.39)式综合即得(3.33)式。

利用上述定理，来证明下面的结果。

定理 3.4(Isaacs 方程)　设下值函数 $V^{-}(\cdot, \cdot) \in C^{1}([0, T] \times \boldsymbol{R}^{n})$，则它满足下述的 Isaacs 方程及终值条件：

$$\begin{cases} V_{t}^{-}(t, x)+H^{-}(t, x, V_{x}^{-}(t, x))=0, \\ \qquad (t, x) \in[0, T) \times \boldsymbol{R}^{n}, \\ V^{-}(T, x)=h(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^{n}, \end{cases} \tag{3.50}$$

其中

$$\begin{aligned} & H^{-}(t, x, p) \\ = & \sup_{w \in W} \inf_{u \in U}\{f^{0}(t, x, u, w)+(p, f(t, x, u, w))\}, \\ & \qquad \forall(t, x, p) \in[0, T] \times \boldsymbol{R}^{n} \times \boldsymbol{R}^{n}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

当上值函数 $V^{+}(\cdot, \cdot) \in C^{1}([0, T] \times \boldsymbol{R}^{n})$ 时，它满足下述的 Isaacs 方程及终值条件：

$$\begin{cases} V_{t}^{+}(t, x)+H^{+}(t, x, V_{x}^{+}(t, x))=0, \\ \qquad (t, x) \in[0, T) \times \boldsymbol{R}^{n}, \\ V^{+}(T, x)=h(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^{n}, \end{cases} \tag{3.52}$$

其中，

$$\begin{aligned} & H^{+}(t, x, p) \\ = & \inf_{u \in U} \sup_{w \in W}\{f^{0}(t, x, u, w)+(p, f(t, x, u, w))\} \\ & \qquad \forall(t, x, p) \in[0, T] \times \boldsymbol{R}^{n} \times \boldsymbol{R}^{n}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

进一步，若下述的 Isaacs 条件成立：

$$\begin{aligned} & H^{-}(t, x, p)=H^{+}(t, x, p) \equiv H(t, x, p), \\ & \qquad \forall(t, x, p) \in[0, T] \times \boldsymbol{R}^{n} \times \boldsymbol{R}^{n}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

且下述问题

$$\begin{cases} V_t(t, x) + H(t, x, V_x(t, x)) = 0, \\ \qquad (t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n, \\ V(T, x) = h(x), \ x \in \boldsymbol{R}^n \end{cases} \tag{3.55}$$

的解唯一，再设上、下值函数 $V^{\pm}(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times \boldsymbol{R}^n)$，则

$$V^-(t, x) = V^+(t, x). \ \forall (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n. \tag{3.56}$$

即二人零和微分对策存在值函数。

在证明此定理之前，先给出下面的引理。这个引理在最优控制理论中非常重要。常称之为菲利浦夫(А.Ф.Филиппов)引理。

引理 3.5 (Филиппов) 设 U 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个闭集，$g: [a, b] \times U \to \boldsymbol{R}$ 为一个给定的映照具有下述性质：对任何固定的 $u \in U$，$t \to g(t, u)$ 是可测的，对任何固定的 $t \in [a, b]$，$u \to g(t, u)$ 是连续的。又设

$$0 \in g(t, U) \equiv \{g(t, u) ; u \in U\}, \text{a. e. } t \in [a, b]. \tag{3.57}$$

则存在可测函数 $u(\cdot): [a, b] \to U$，使得

$$g(t, u(t)) = 0, \quad \text{a. e. } t \in [a, b]. \tag{3.58}$$

证 先置

$$d(u, v) = \frac{\|u - v\|}{1 + \|u - v\|}, \quad \forall u, v \in \boldsymbol{R}^m.$$

其中，$\|\cdot\|$ 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的欧氏范数。则易知，$d(\cdot, \cdot)$ 具有下述性质：

$$\begin{cases} 0 \leqslant d(u, v) = d(v, u) < 1, \ \forall u, v \in \boldsymbol{R}^m, \\ d(u, v) = 0, \Longleftrightarrow u = v, \\ d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v), \ \forall u, v, w \in \boldsymbol{R}^m. \end{cases} \tag{3.59}$$

定义

$$\Gamma(t)=\{u\in U;g(t,u)=0\},\ t\in[a,b]. \tag{3.60}$$

不妨设 $\Gamma(t)\neq\phi$, $\forall t\in[a,b]$。对于几乎处处非空的情形，证明是类似的。再设 $U_0=\{v_k;\ k\geqslant 1\}$ 为 U 的一个可列稠密子集。则对任何的 $u\in U$，及 $0\leqslant C<1$，有：

$$\{t\in[a,b];d(u,\Gamma(t))\leqslant C\} \tag{3.61}$$

$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}\left\{t\in[a,b];\ d(u,v_j)\leqslant C+\frac{1}{i},\right.$$

$$\left.|g(t,v_j)|\leqslant\frac{1}{i}\right\}.$$

其中，

$$d(u,\Gamma(t))=\inf_{v\in\Gamma(t)}d(u,v).$$

事实上，对于任何 $t\in[a,b]$，使得 $d(u,\Gamma(t))\leqslant C$，当且仅当(注意 U_0 在 U 中稠密)存在子列 $\{v_{j_k}\}\subset U_0$，使得

$$\lim_{k\to\infty}d(u,v_{j_k})\leqslant C, \tag{3.62}$$

$$\lim_{k\to\infty}d(v_{j_k},\Gamma(t))=0, \tag{3.63}$$

而(3.63)式等价于

$$\lim_{k\to\infty}g(t,v_{j_k})=0. \tag{3.64}$$

此处，必须注意：由于 $C<1$，故由(3.62)式及 $d(\cdot,\cdot)$ 的定义知 $\{v_{j_k}\}$ 必是有界的。于是(3.62)及(3.64)式等价于对任何 $i\geqslant 1$，存在 $j\geqslant i$，使得

$$\begin{cases}d(u,v_j)\leqslant C+\dfrac{1}{i},\\ |g(t,v_j)|\leqslant\dfrac{1}{i}.\end{cases}$$

这便证得(3.61)式。(3.61)式右端的每一项均是可测的，所以左端也可测。另一方面

$$\{t\in[a,b]:d(u,\Gamma(t))\leqslant C\}=[a,b],\ \forall C\geqslant 1,$$

$$\{t\in[a,b]:d(u,\Gamma(t))\leqslant C\}=\phi,\ \forall C<0.$$

故知，函数 $t\mapsto d(u,\Gamma(t))$ 是可测的。

现在，定义

$$u_0(t)=v_1,\ \forall t\in[a,b], \tag{3.65}$$

显然，$u_0(\cdot)$ 是可测的，且有

$$d(u_0(t),\Gamma(t))<1,\ \forall t\in[a,b]. \tag{3.66}$$

今假设已定义好 $u_{k-1}(\cdot)$，它是可测的，且满足

$$d(u_{k-1}(t),\Gamma(t))<1/2^{k-1},\ \forall t\in[a,b], \tag{3.67}$$

$$d(u_{k-1}(t),u_{k-2}(t))<1/2^{k-2},\ \forall t\in[a,b]. \tag{3.68}$$

则可以定义

$$\begin{cases}C_i^k=\{t\in[a,b]:d(v_i,\Gamma(t))<1/2^k\},\\ D_i^k=\{t\in[a,b]:d(v_i,u_{k-1}(t))<1/2^{k-1}\}.\end{cases} \tag{3.69}$$

由于 $t\mapsto d(v_i,\Gamma(t))$ 是可测的，故 $C_i^k\in\mathscr{L}[a,b]$。同样地，也有 $D_i^k\in\mathscr{L}[a,b]$。记

$$A_i^k=C_i^k\cap D_i^k,\qquad k,\ i\geqslant 1.$$

则 A_i^k 也是可测。现在来说明

$$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^k,\ \ \forall k\geqslant 1. \tag{3.70}$$

事实上，对任何的 $t\in[a,b]$，由(3.67)式知存在 $u\in\Gamma(t)$，使得

$$d(u_{k-1}(t),u)<1/2^{k-1}, \tag{3.71}$$

再由 U_0 在 U 中的稠密性知，存在 $i\geqslant 1$，使得

$$d(u,v_i)<1/2^k, \tag{3.72}$$

$$d(u_{k-1}(t),v_i)<1/2^{k-1}. \tag{3.73}$$

因为 $u\in\Gamma(t)$，故(3.72)式意味着 $t\in C_i^k$，而(3.73)式又意味着 $t\in D_i^k$。因此，$t\in A_i^k$，(3.70)式得证。今定义 $u_k(\cdot):[a,b]$

$\to U_0 \subset U$ 如下：

$$u_k(t) = v_i, \ \forall t \in A_i^k \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j^k. \tag{3.74}$$

则可见，$u_k(\cdot)$是可测的，且对任何的 $t \in [a, b]$，总有 $i \geqslant 1$，使得

$$t \in A_i^k \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j^k \subset C_i^k \cap D_i^k,$$

故由 $t \in C_i^k$ 知(见(3.74)式)

$$d(u_k(t), \Gamma(t)) < 1/2^k,$$

而由 $t \in D_i^k$ 可知

$$d(u_k(t), u_{k-1}(t)) < 1/2^{k-1}.$$

因此，我们完成了$\{u_k(\cdot)\}$的归纳构造，使得(3.67)和(3.68)式对任何 $k \geqslant 1$ 成立，于是，由(3.68)式知，对每个 $t \in [a, b]$，$\{u_k(t)\}$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中 Cauchy，因此，存在 $u(\cdot)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} u_k(t) = u(t), \ t \in [a, b]. \tag{3.75}$$

由于每个 $u_k(\cdot): [a, b] \to U$ 可测，且U是闭的，故$u(\cdot): [a, b] \to U$ 也是可测的。再由(3.67)式知

$$d(u(t), \Gamma(t)) = 0, \ t \in [a, b]. \tag{3.76}$$

而由 $g(t, u)$关于 u 的连续性知 $\Gamma(t)$是闭的。因此，(3.76)式导致

$$u(t) \in \Gamma(t), \ t \in [a, b],$$

即(3.58)式成立。

现在，证明定理 3.4。

证 我们仅证明关于下值函数的结果。关于上值函数的结果，证明是类似的。首先，对任何 $\varepsilon > 0$，$(t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$，构造 $\alpha_\varepsilon \in \mathscr{A}[t, T]$如下：对任何 $w(\cdot) \in \mathscr{W}[t, T]$，令

$g_\varepsilon(s, u)$

$$= [f^0(t, x, u, w(s)) + (V_x^-(t, x), f(t, x, u, w(s)))$$
$$- \inf_{\bar{u}\in U} \{f^0(t, x, \bar{u}, w(s)) + (V_x^-(t, x), f(t, x, \bar{u}, w(s)))\}$$
$$- \varepsilon]^+, \qquad \forall (s, u) \in [t, T] \times U.$$

此处，$[\cdots]^+ = \max\{0, \cdots\}$. 则易知，$g_\varepsilon$ 关于 s 是可测的，关于 u 是连续的，且(由下确界的定义)

$$0 \in g_\varepsilon(s, v), \qquad \text{a. e. } s \in [t, T].$$

因此，由引理 3.5 知，存在 $u_\varepsilon(\cdot) \in \mathscr{U}[t, T]$，使得

$$g_\varepsilon(s, u_\varepsilon(s)) = 0, \quad \text{a. e. } s \in [t, T]. \tag{3.77}$$

即

$$f^0(t, x, u_\varepsilon(s), w(s)) + (V_x^-(t, x), f(t, x, u_\varepsilon(s), w(s))) \tag{3.78}$$
$$\leqslant \inf_{\bar{u}\in U} \{f^0(t, x, \bar{u}, w(s)) + (V_x^-(t, x), f(t, x, \bar{u}, w(s)))\}$$
$$+ \varepsilon.$$

定义

$$\alpha_\varepsilon[w(\cdot)](s) = u_\varepsilon(s), \forall s \in [t, T]. \tag{3.79}$$

易知，$\alpha_\varepsilon \in \mathscr{A}[t, T]$. 于是，由(3.33)式知，对任何 $s > t$，

$$V^-(t, x) \leqslant \sup_{w(\cdot)\in \mathscr{W}[t,T]} \left\{\int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), \alpha_\varepsilon[w(\cdot)](\tau), w(\tau))d\tau + V^-(s, y_{t,x}(s))\right\}.$$

因此，

$$0 \leqslant \sup_{w(\cdot)\in \mathscr{W}[t,T]} \left\{\int_t^s f^0(t, x, u_\varepsilon(\tau), w(\tau))d\tau + V_t^-(t, x)(s-t) + (V_x^-(t, x), y_{t,x}(s) - x) + o(|s-t| + \|y_{t,x}(s) - x\|)\right\}$$

$$\leqslant \sup_{w(\cdot)\in \mathscr{W}[t,T]} \left\{\int_t^s [f^0(t, x, u_\varepsilon(\tau), w(\tau))\right.$$

$$+ (V_x^-(t, x), f(t, x, u_\varepsilon(\tau), w(\tau)))]d\tau$$

$$+V_t^-(t, x)(s-t) + o(|s-t|)\Big\}$$

$$\leqslant \int_t^s \sup_{w\in W} \inf_{u\in U} [f^0(t, x, u, w) + (V_x^-(t, x),$$

$$f(t, x, u, w))]d\tau + \varepsilon(s-t) + V_t^-(t, x)(s-t)$$

$$+ o(|s-t|).$$

值得注意的是，上式中的 $o(|s-t|)$ 关于 $w(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 是一致的。从而，除以 $(s-t)$，再令 $s \downarrow t$，得到

$$0 \leqslant V_t^-(t, x) + H^-(t, x, V_x^-(t, x)) + \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的，得到

$$0 \leqslant V_t^-(t, x) + H^-(t, x, V_x^-(t, x)). \qquad (3.80)$$

另一方面，对任何 $\varepsilon > 0$，及 $s > t$，存在 $\alpha_s^\varepsilon \in \mathscr{A}[t, T]$，使得

$$V^-(t, x) + \varepsilon(s-t)$$

$$\geqslant \sup_{w(\cdot)\in \mathscr{W}[t,T]} \Big\{\int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), \alpha_s^\varepsilon[w(\cdot)](\tau), w(\tau))d\tau$$

$$+ V^-(s, y_{t,x}(s))\Big\}.$$

从而，

$$\varepsilon(s-t) \geqslant \sup_{w(\cdot)\in \mathscr{W}[t,T]} \Big\{\int_t^s f^0(t, x, \alpha_s^\varepsilon[w(\cdot)](\tau), w(\tau))d\tau$$

$$+ V_t^-(t, x)(s-t) + (V_x^-(t, x), y_{t,x}(s) - x)$$

$$+ o(|s-t| + \|y_{t,x}(s) - x\|)\Big\}$$

$$\geqslant \sup_{w(\cdot)\in \mathscr{W}[t,T]} \Big\{\int_t^s \inf_{u\in U} [f^0(t, x, u, w(\tau))$$

$$+ (V_x^-(t, x), f(t, x, u, w(\tau)))]d\tau$$

$$+ V_t^-(t, x)(s-t) + o(|s-t|)\Big\}$$

$$\geqslant \int_t^s \inf_{u \in U} [f^0(t, x, u, w) + (V_x^-(t, x), f(t, x, u, w))] d\tau$$
$$+ V_t^-(t, x)(s-t) - o(|s-t|).$$

此处，$o(|s-t|)$关于$w(\cdot)$和$u(\cdot)$是一致的，而$w \in W$为任意一个元素。则两边除以$(s-t)$，再令$s \downarrow t$，可得

$$\varepsilon \geqslant V_t^-(t, x) + \inf_{u \in U} [f^0(t, x, u, w)$$
$$+ (V_x^-(t, x), f(t, x, u, w))], \forall w \in W.$$

因此，关于$w \in W$取上确界，再令$\varepsilon \to 0$，得到

$$0 \geqslant V_t^-(t, x) + H^-(t, x, V_x^-(t, x)). \qquad (3.81)$$

综合(3.80)和(3.81)式，得证(3.50)式。类似地，可证(3.52)式。今若(3.54)式成立，且$V^\pm(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times \boldsymbol{R}^n)$，则它们均满足(3.55)。因此，当(3.55)解唯一时，得到(3.56)式。

方程(3.50)、(3.52)和(3.55)与(2.26)具有完全一样的形式，类似于最优控制问题，我们发现定理3.4中假设了上或下值函数是C^1的，但命题3.2仅告诉我们上、下值函数$V^\pm(t, x)$关于t和x是连续的。因此，定理3.4的条件是太强了。如同控制问题一样，一般而言，上、下值函数未必是C^1的。因此，定理3.4的意义仅仅是导出了Isaacs方程的形式，严格的理论还有待于建立。

§4 最优转换控制问题

本节将讨论一类非经典的最优控制问题——最优转换控制问题。这一类问题的非经典性出现于性能指标中。与经典最优控制问题相反，我们将详细讨论无限时间区间的问题，而简述有限时间区间问题。

设 $\Lambda=\{1, 2, \cdots, m\}$，$f: \boldsymbol{R}^n\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^n$，$f^0$: $\boldsymbol{R}^n\times\Lambda\to\boldsymbol{R}$，$k: \Lambda\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^+\equiv[0, \infty)$ 为连续映照。作如下假设：

(i) 存在常数 L, L_0, $r\geqslant 0$, $0<\delta\leqslant 1$，使得对任何 x, $\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，和 $d\in\Lambda$，成立着

$$\|f(x, d)-f(\hat{x}, d)\|\leqslant L\|x-\hat{x}\|, \tag{4.1}$$

$$\|f(x, d)\|\leqslant L+L_0\|x\|, \tag{4.2}$$

$$|f^0(x, d)-f^0(\hat{x}, d)|\leqslant L(1+\|x\|^r+\|\hat{x}\|^r)\|x-\hat{x}\|^\delta, \tag{4.3}$$

$$|f^0(x, d)|\leqslant L(1+\|x\|^{r+\delta}). \tag{4.4}$$

(ii) 对所有的 d, $\hat{d}$, $\tilde{d}\in\Lambda$, $d\neq\hat{d}\neq\tilde{d}$，有

$$k(d, \tilde{d})<k(d, \hat{d})+k(\hat{d}, \tilde{d}), \tag{4.5}$$

$$k(d, d)=0。 \tag{4.6}$$

容易见到，上述的(i)与§2中的(H1)′相同(假如将 Λ 看成 U 的话)。类似与§2中定常情形，设 $\lambda>0$，满足

$$\lambda>L_0(r+\delta). \tag{4.7}$$

此处的常数 L_0, r 和 δ 由上面(i)中给出。

现在，定义：$\forall d\in\Lambda$,

$$\begin{aligned}\mathscr{S}^d=\{\{d_i, \theta_i\}_{i\geqslant 0}: & d_0=d, \ \theta_0=0, \ d_i\in\Lambda, \ \theta_i\in[0, \infty], \\ & \forall i\geqslant 1; \theta_i\uparrow+\infty; \text{当 } \theta_{i+1}<\infty \text{ 时}, d_{i+1}\neq d_i, \\ & \sum_{i\geqslant 1}k(d_{i-1}, d_i)e^{-\lambda\theta_i}<\infty\}.\end{aligned}$$

任何 $\{d_i, \theta_i\}_{i\geqslant 0}\in\mathscr{S}^d$ 称为以 d 为初值的一个转换控制。今对任何一个转换控制 $\{d_i, \theta_i\}_{i\geqslant 0}\in\mathscr{S}^d$，记

$$d(\cdot)=\sum_{i\geqslant 1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1}, \theta_i)}(\cdot): [0, \infty)\to\Lambda. \tag{4.8}$$

则易知，$d(\cdot)$ 是一个分段常值的右连续函数。对于这样定义的 $d(\cdot)$，考虑下述系统：

$$\begin{cases}\dot{y}_x(t)=f(y_x(t),\ d(t)),\ \text{a. e. } t\in[0,\ \infty),\\ y_x(0)=x.\end{cases}\tag{4.9}$$

设 $0=\theta_1<\theta_2<\theta_3<\cdots\cdots$，则在$[0,\ \theta_1)$上，系统为

$$\begin{cases}\dot{y}_x(t)=f(y_x(t),\ d_0),\ t\in[0,\ \theta_1),\\ y_x(0)=x.\end{cases}$$

而在$(\theta_1,\ \theta_2)$上，系统为

$$\begin{cases}\dot{y}_x(t)=f(y_x(t),\ d_1),\ t\in[\theta_1,\ \theta_2).\\ y_x(\theta_1)=y_x(\theta_1-0).\end{cases}$$

以此类推。今若设系统

$$\dot{y}(t)=f(y(t),\ d)$$

表示第 d 部机器运行的规律。则上述表示，在$[\theta_0,\ \theta_1)$上，开动着第 d_0 部机器，在时刻 $t=\theta_1$，转换到第 d_1 部机器上，然后在$[\theta_1,\ \theta_2)$上运行该部机器，再在时刻 $t=\theta_2$，转换到第 d_2 部机器上，以此类推。因此，(4.9)式表示了上述的一系列转换、运行过程。若光考虑(4.9)式，则它是我们已经讨论过的经典控制问题的一个特例，无非是将 U 取成一个有限集。现在，考虑其性能指标：

$$J_x^d(\{d_i,\ \theta_i\}_{i\geqslant 0})=\int_0^{\infty}f^0(y_x(t),\ d(t))e^{-\lambda t}\mathrm{d}t+\sum_{i\geqslant 1}k(d_{i-1},\ d_i)e^{-\lambda\theta_i}.\tag{4.10}$$

在上式右端中，第一项表示运行花费，它与经典的无限时区定常问题相同(见§2)。而第二项则表示转换花费，其意义如下：在时刻 $t=\theta_i$，由第 d_{i-1} 部机器转换到第 d_i 部机器的花费为 $e^{-\lambda\theta_i}k(d_{i-1},\ d_i)$。正由于此项的出现，使得问题变成非经典的了。

为了以后书写方便，我们将不区分 $d(\cdot)$ 和$\{d_i,\ \theta_i\}_{i\geqslant 0}$。但是，值得注意的是，当某个 $\theta_{j-1}=\theta_j$ 时，尽管作为函数

$$d(\cdot)\equiv\sum_{i\geq 1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)=d'(\cdot)$$

$$\equiv\sum_{\substack{i\geq 1\\ i\neq j}}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot),$$

但我们仍认为作为转换控制，它们是不同的，这是由于转换花费的出现而造成的。事实上，它们对应的转换花费是不同的。因此，将 $d(\cdot)$ 与 $\{d_i,\ \theta_i\}_{i\geq 0}$ 等同起来时，应记住此点。作了这等同以后，(4.10)式的左端便可写成 $J_x^d(d(\cdot))$。下面，叙述最优转换控制问题。

问题 S. 对给定的 $x\in\boldsymbol{R}^n$, $d\in\Lambda$, 寻找 $d^*(\cdot)\in\mathcal{S}^d$, 使得

$$J_x^d(d^*(\cdot))=\inf_{d(\cdot)\in\mathcal{S}^d}J_x^d(d(\cdot)). \tag{4.11}$$

当这样的 $d^*(\cdot)$ 存在时，称之为最优转换控制。

定义问题S的值函数为

$$\begin{cases}v^d(x)=\inf\limits_{d(\cdot)\in\mathcal{S}^d}J_x^d(d(\cdot)), & \forall(x,\ d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda,\\ v(x)=(v^1(x),\ v^2(x),\ \cdots,\ v^m(x)), & x\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases} \tag{4.12}$$

与前面§1～§2中讨论的最优控制不同之处是，现在的值函数 $v(\cdot):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$, 是向量值的。原因是由于转换花费在指标中的出现，使得最优指标值依赖于转换控制的初始值。从而，值函数是 $(x,\ d)$ 的函数。由于 Λ 是一个有限集，我们便将 Λ 认为是指标集，从而，值函数成为 x 的向量值函数。可想而知，§2中有关的所有结论都将会有许多有趣的改动。在这一节中，我们将详细地讨论这些改动。

命题 4.1 值函数 $v(\cdot)$ 满足下述条件：$\forall x,\ \hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $d\in\Lambda$,

$$|v^d(x)|\leq C(1+\|x\|^{r+\delta}), \tag{4.13}$$

$$|v^d(x)-v^d(\hat{x})|\leq C(1+\|x\|^{r+\delta}+\|\hat{x}\|^{r+\delta})\|x-\hat{x}\|^{\eta}. \tag{4.14}$$

此处，C 仅依赖于 $L, L_0, r, \delta, \lambda, \eta$，而 $\eta \in \left(0, \frac{\lambda - L_0(r+\delta)}{L} \wedge \delta\right)$。

证 首先，对任何的 $(x, d) \in \mathbf{R}^n \times \Lambda$，令 $\bar{d}(\cdot) \in \mathscr{S}^d$ 为无转换的控制，即 $\theta_1 = \infty$ 或 $\bar{d}(t) \equiv d$，则由值函数的定义并注意类似于(2.42)的式子，有

$$
\begin{aligned}
v^d(x) &\leqslant J_x^d(\bar{d}(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f^0(y_x(t), d)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} L(1 + \|y_x(t)\|^{r+\delta})\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} L[1 + e^{L_0(r+\delta)t}(\|x\| + Lt)^{r+\delta}]\mathrm{d}t \\
&\leqslant C(1 + \|x\|^{r+\delta}).
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

反之，对任何的 $d(\cdot) \in \mathscr{S}^d$，由 $k(\cdot, \cdot)$的非负性，知

$$
\begin{aligned}
J_x^d(d(\cdot)) &\geqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} f^0(y_x(t), d(t))\mathrm{d}t \\
&\geqslant -C(1 + \|x\|^{r+\delta}).
\end{aligned}
$$

因此，关于 $d(\cdot) \in \mathscr{S}^d$ 取下确界，可得

$$
v^d(x) \geqslant -C(1 + \|x\|^{r+\delta}). \tag{4.16}
$$

从而，得到(4.13)式。今对于 $x, \hat{x} \in \mathbf{R}^n$，$d \in \Lambda$ 和 $d(\cdot) \in \mathscr{S}^d$，由类似于(2.48)的式子，对 $\forall 0 < \eta < \frac{\lambda - L_0(r+\delta)}{L} \wedge \delta$，

$$
\begin{aligned}
&|J_x^d(d(\cdot)) - J_{\hat{x}}^d(d(\cdot))| \\
\leqslant &\int_0^\infty e^{-\lambda t} L(3 + \|y_x(t)\|^{r+\delta} + \|y_{\hat{x}}(t)\|^{r+\delta}) \cdot \\
&\|y_x(t) - y_{\hat{x}}(t)\|^\eta \mathrm{d}t, \\
\leqslant &L \int_0^\infty e^{-\lambda t} \{3 + e^{L_0(r+\delta)t}[(\|x\| + Lt)^{r+\delta}
\end{aligned}
$$

$$+ (\|\hat{x}\| + Lt)^{\gamma+\delta}]\} \cdot e^{L\gamma t}\|x - \hat{x}\|^{\gamma}dt, \tag{4.17}$$

$$\leqslant C(1 + \|x\|^{\gamma+\delta} + \|\hat{x}\|^{\gamma+\delta})\|x - \hat{x}\|^{\gamma}.$$

于是，关于 $d(\cdot)\in\mathscr{S}^d$ 取下确界，即得(4.14)式。

下一个结果应该是最优性原理。对于最优转换控制问题，将会得到一些新的东西。这也将体现问题S的非经典性。我们先定义下述算子：对任何 $w(\cdot)=(w^1(\cdot), w^2(\cdot), \cdots, w^m(\cdot)): \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$，令

$$M^d[w](x) = \min_{\bar{d}\in\Lambda, \bar{d}\neq d}\{w^{\bar{d}}(x) + k(d, \bar{d})\},$$

$$\forall x\in\boldsymbol{R}^n,\ d\in\Lambda. \tag{4.18}$$

定理 4.2 （最优性原理） 值函数 $v(\cdot)$ 满足下述条件：$\forall(x, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda$，$t\geqslant 0$，

$$v^d(x)\leqslant M^d[v](x), \tag{4.19}$$

$$v^d(x)\leqslant\int_0^t f^0(y_x(\tau), d)e^{-\lambda\tau}d\tau + v^d(y_x(t))e^{-\lambda t}. \tag{4.20}$$

此处，$y_x(\cdot)\equiv y_x(\cdot, d)$ 为系统(4.9)对应于常值控制（即无转换控制）$d(t)\equiv d$ 的解。进一步，若(4.19)式中严格不等式在点 x_0 成立，则存在 $t_0>0$，使得

$$v^d(x_0) = \int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), d)e^{-\lambda\tau}d\tau + v^d(y_{x_0}(t))e^{-\lambda t},$$

$$\forall t\in[0, t_0]. \tag{4.21}$$

证 对任何 $(x, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda$ 以及 $\bar{d}\in\Lambda\setminus\{d\}$，任取 $\bar{d}(\cdot)\in\mathscr{S}^{\bar{d}}$，设它为

$$\bar{d}(\cdot) = \sum_{i\geqslant 1}\bar{d}_{i-1}\chi_{[\bar{\theta}_{i-1},\bar{\theta}_i)}(\cdot).$$

然后，作 $d(\cdot)=\sum_{i\geqslant 1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)$ 如下：

$$d_0 = d,\ \theta_0 = 0,\ d_i = \bar{d}_{i-1},\ \theta_i = \bar{\theta}_{i-1},\ \forall i\geqslant 1.$$

则易见，$d(\cdot)\in\mathscr{S}^d$，且有

$$v^d(x)\leqslant J_x^d(d(\cdot)) = J_x^d(\bar{d}(\cdot))+k(d,\bar{d}). \qquad (4.22)$$

由于 $\bar{d}(\cdot)\in\mathscr{S}^{\bar{d}}$是任意的,故得

$$v^d(x)\leqslant v^{\bar{d}}(x)+k(d,\bar{d}), \quad \forall \bar{d}\in\Lambda. \qquad (4.23)$$

故可得(4.19)式。现在,对任何 $d(\cdot)=\sum_{i\geqslant1} d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)\in\mathscr{S}^d$,定义(对任何给定的 $t>0$)。$\tilde{d}(\cdot)=\sum_{i\geqslant1}\tilde{d}_{i-1}\chi_{[\tilde{\theta}_{i-1},\tilde{\theta}_i)}(\cdot)\in\mathscr{S}^d$ 如下:

$$\begin{cases}\tilde{d}_i=d_i, \ \forall i\geqslant0,\\ \tilde{\theta}_0=0, \ \ \tilde{\theta}_i=\theta_i+t, \ \forall i\geqslant1.\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}v^d(x)\leqslant J_x^d(\tilde{d}(\cdot)) &= \int_0^t f^0(y_x(\tau),d)e^{-\lambda\tau}d\tau\\ &+\int_t^\infty f^0(y_x(\tau),d(\tau-t))e^{-\lambda\tau}d\tau\\ &+\sum_{i\geqslant1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}\cdot e^{-\lambda t}\\ &=\int_0^t f^0(y_x(\tau),d)e^{-\lambda\tau}d\tau+e^{-\lambda t}J^d_{y_x(t)}(d(\cdot)).\end{aligned}$$

所以,关于 $d(\cdot)\in\mathscr{S}^d$ 取下确界,得到(4.20)式,最后,设

$$v^d(x_0)<M^d[v](x_0). \qquad (4.24)$$

则 $\forall\varepsilon>0$,可找到 $d^\varepsilon(\cdot)=\sum_{i\geqslant1}d^\varepsilon_{i-1}\chi_{[\theta^\varepsilon_{i-1},\theta^\varepsilon_i)}(\cdot)\in\mathscr{S}^d$,使得

$$v^d(x_0)+\varepsilon\geqslant J^d_{x_0}(d^\varepsilon(\cdot)). \qquad (4.25)$$

若 $\theta_1^\varepsilon=0$,则由(4.25)式知,

$$\begin{aligned}v^d(x_0)+\varepsilon &= J^{d_1^\varepsilon}_{x_0}(\tilde{d}^\varepsilon(\cdot))+k(d,d_1^\varepsilon)\\ &\geqslant v^{d_1^\varepsilon}(x_0)+k(d,d_1^\varepsilon)\geqslant M^d[v](x_0),\end{aligned} \qquad (4.26)$$

此处,$\tilde{d}^\varepsilon(\cdot)=\sum_{i\geqslant1}\tilde{d}^\varepsilon_{i-1}\chi_{[\tilde{\theta}^\varepsilon_{i-1},\tilde{\theta}^\varepsilon_i)}(\cdot)\in\mathscr{S}^{d_1^\varepsilon}$,

$$\tilde{d}_i^\varepsilon=d^\varepsilon_{i+1}, \ \tilde{\theta}_i^\varepsilon=\theta^\varepsilon_{i+1}, \ \forall i\geqslant0.$$

显然,(4.24)与(4.26)矛盾(因为 ε 可取得任意小)。因此,

$\theta_1^\varepsilon > 0$，今证明存在 $t_1 > 0$，使得

$$\theta_1^\varepsilon \geqslant t_1, \ \forall \varepsilon > 0. \tag{4.27}$$

事实上，若不然，则对某个 $\varepsilon \downarrow 0$，

$$\theta_1^\varepsilon \searrow 0. \tag{4.28}$$

因此，

$$\begin{aligned}
v^d(x_0) + \varepsilon \geqslant J_{x_0}^d(d^\varepsilon(\cdot))
&= \int_0^{\theta_1^\varepsilon} f^0(y_{x_0}(\tau), d) e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau \\
&\quad + \int_{\theta_1^\varepsilon}^{\infty} f^0(y_{x_0}(\tau), d^\varepsilon(\tau)) e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau \\
&\quad + k(d, d_1^\varepsilon) e^{-\lambda\theta_1^\varepsilon} \\
&\quad + \sum_{i \geqslant 2} k(d_{i-1}^\varepsilon, d_i^\varepsilon) e^{-\lambda\theta_i^\varepsilon} \\
&= \int_0^{\theta_1^\varepsilon} f^0(y_{x_0}(\tau), d) e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau + k(d, d_1^\varepsilon) e^{-\lambda\theta_1^\varepsilon} \\
&\quad + e^{-\lambda\theta_1^\varepsilon} J_{y_{x_0}(\theta_1^\varepsilon)}^{d_1^\varepsilon}(\tilde{d}^\varepsilon(\cdot)) \qquad (4.29) \\
&\geqslant \int_0^{\theta_1^\varepsilon} f^0(y_{x_0}(\tau), d) e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau + k(d, d_1^\varepsilon) e^{-\lambda\theta_1^\varepsilon} \\
&\quad + e^{-\lambda\theta_1^\varepsilon} v^{d_1^\varepsilon}(y_{x_0}(\theta_1^\varepsilon)).
\end{aligned}$$

此处，$\tilde{d}^\varepsilon(\cdot) = \sum_{i \geqslant 1} \tilde{d}_{i-1}^\varepsilon \chi_{[\tilde{\theta}_{i-1}^\varepsilon, \tilde{\theta}_i^\varepsilon)}(\cdot) \in \mathscr{S}^{d_1^\varepsilon}$ 定义为：

$$\begin{cases}
\tilde{d}_i^\varepsilon = \tilde{d}_{i+1}^\varepsilon, \ \forall i \geqslant 0, \\
\tilde{\theta}_0^\varepsilon = 0, \ \tilde{\theta}_i^\varepsilon = \theta_i^\varepsilon - \theta_1^\varepsilon, \ i \geqslant 1.
\end{cases}$$

注意到 Λ 为有限集，$v^d(\cdot)$ 和 $y_x(\cdot)$ 均连续。因此，在(4.29)式中，令 $\varepsilon \to 0$ 得(令 $d_1^\varepsilon \to \tilde{d}$)

$$v^d(x_0) \geqslant k(d, \tilde{d}) + v^{\tilde{d}}(x_0) \geqslant M^d[v](x_0)$$

又与(4.24)式矛盾。故(4.27)式成立。于是，对任何 $t < t_0 \equiv \frac{t_1}{2}$，有

$$v^d(x_0)+\varepsilon \geqslant \int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), d)e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau + e^{-\lambda t}J^d_{y_{x_0}(t)}(\tilde{d}_\varepsilon(\cdot))$$

$$\geqslant \int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), d)e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau + e^{-\lambda t}v^d(y_{x_0}(t)).$$

故令 $\varepsilon\to 0$，再结合(4.20)式，得到(4.21)式。

利用上述定理，导出下述的定理。

定理 4.3 (HJB 方程) 假如值函数 $v(\cdot)\in C^1(\boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{R}^m)$，则它满足下述的 HJB 方程：

$$\max\{\lambda v^d(x)-(v^d_x(x), f(x, d))-f^0(x, d), \\ v^d(x)-M^d[v](x)\}=0, \qquad (4.30)$$
$$(x, d)\in \boldsymbol{R}^n\times \Lambda.$$

证 首先，由(4.19)和(4.20)式知(4.30)式的左端 $\leqslant 0$。其次，再由定理 4.2 知，当

$$v^d(x_0)<M^d[v](x_0)$$

时，必有(见(4.21)式)

$$\lambda v^d(x_0)-(v^d_x(x_0), f(x_0, d))-f^0(x_0, d)=0.$$

从而得证(4.30)式。

对于问题 S，由最优性原理导出 HJB 方程要比经典控制问题中的类似过程要来得更简单。原因是此时的控制函数的结构比较简单。

方程(4.30)也可表示成下述形式：$\forall (x, d)\in \boldsymbol{R}^n\times \Lambda$，

$$\begin{cases} \lambda v^d(x)-(v^d_x(x), f(x, d))-f^0(x, d)\leqslant 0, \\ \quad v^d(x)-M^d[v](x)\leqslant 0, \\ [\lambda v^d(x)-(v^d_x(x), f(x, d))-f^0(x, d)]\cdot \\ \quad [v^d(x)-M^d[v](x)]=0. \end{cases} \qquad (4.31)$$

这样的方程组常称为拟变分不等式组，而 $M^d[v](\cdot)$ 称为是“障碍”，从而称 M 为转换障碍算子。显见，(4.30)与(2.50)

是有很大差别的。这个差别就在于转换障碍算子M的出现。

在§2中，我们曾形式地用值函数去构造最优控制。那里的过程是非常粗糙和不严格的。但是，对于现在的问题S而言，却可使得构造最优转换控制的过程是完全严格的。下面，通过值函数$v(\cdot)$来构造出一个最优转换控制。

设$(x, d)\in \boldsymbol{R}^n\times\Lambda$，置

$$d_0^* = d,\ \theta_0^* = 0. \tag{4.32}$$

我们来解下述问题：

$$\begin{cases}\dot{y}_x(t) = f(y_x(t), d),\ t>0,\\ y_x(0) = x.\end{cases} \tag{4.33}$$

则易知，函数$t\to M^{d_0^*}[v](y_x(t))$是连续的。因此，可定义

$$\theta_1^* = \inf\{t\geqslant 0;\ v^{d_0^*}(y_x(t)) = M^{d_0^*}[v](y_x(t))\}. \tag{4.34}$$

此处，约定$\inf\phi = +\infty$。不妨设$\theta_1^*<\infty$（否则，情形将会更简单），则定义

$$\begin{aligned}d_1^* = \min\{\tilde{d}\in\Lambda\setminus\{d\};\ &M^{d_0^*}[v](y_x(\theta_1^*))\\ &= v^{\tilde{d}}(y_x(\theta_1^*)) + k(d_0^*, \tilde{d})\}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

然后，再解下述问题：

$$\begin{cases}\dot{y}_x(t) = f(y_x(t), d_1^*),\ t\geqslant\theta_1^*,\\ y_x(\theta_1^*) = y_x(\theta_1^* - 0).\end{cases} \tag{4.36}$$

然后，定义

$$\theta_2^* = \inf\{t\geqslant\theta_1^*;\ v^{d_1^*}(y_x(t)) = M^{d_1^*}[v](y_x(t))\}. \tag{4.37}$$

设$\theta_2^*<\infty$，则令

$$\begin{aligned}d_2^* = \min\{\tilde{d}\in\Lambda\setminus\{d_1^*\};\ &M^{d_1^*}[v](y_x(t))\\ &= v^{\tilde{d}}(y_x(t)) + k(d_1^*, \tilde{d})\}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

以此类推，完成定义$\{d_i^*, \theta_i^*\}_{i\geqslant 0}$，我们要说明它是一个最优控制。

首先，证明

$$v^{d_i^*}(y_x(\theta_i^*)) < M^{d_i^*}[v](y_x(\theta_i^*)), \ i \geqslant 1. \tag{4.39}$$

事实上，若不然，则由 d_i^* 的定义知(注意(4.5)式)

$$\begin{aligned}
v^{d_{i-1}^*}(y_x(\theta_i^*)) &= U^{d_i^*}(y_x(\theta_i^*)) + k(d_{i-1}^*, d_i^*) \\
&= M^{d_i^*}[v](y_x(\theta_i^*)) + k(d_{i-1}^*, d_i^*) \\
&= u^{\tilde{d}}(y_x(\theta_i^*)) + k(\tilde{d}, d_i^*) + k(d_{i-1}^*, d_i^*) \\
&> u^{\tilde{d}}(y_x(\theta_i^*)) + k(\tilde{d}, d_{i-1}^*) \\
&\geqslant M^{d_{i-1}^*}[v](y_x(\theta_i^*)) \geqslant v^{d_{i-1}^*}(y_x(\theta_i^*))
\end{aligned}$$

这是不可能的。因此(4.39)式成立。从而必有

$$\theta_i^* < \theta_{i+1}^*, \ \forall i \geqslant 0, \ \theta_i^* < \infty. \tag{4.40}$$

再由 θ_{i+1}^* 的定义知

$$v^{d_i^*}(y_x(t)) < M^{d_i^*}[v](y_x(t)), \ \forall t \in [\theta_i^*, \theta_{i+1}^*). \tag{4.41}$$

因此，由定理 4.2 的最后部分可知

$$\begin{aligned}
v^{d_i^*}(y_x(\theta_i^*)) &= \int_0^{\theta_{i+1}^* - \theta_i^*} f^0(y_{y_x(\theta_i^*)}(\tau), d_i^*) e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&\quad + v^{d_i^*}(y_{y_x(\theta_i^*)}(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*)) e^{-\lambda(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*)} \\
&= \Big\{ \int_{\theta_i^*}^{\theta_{i+1}^*} f^0(y_x(\tau), d_i^*) e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&\quad + v^{d_i^*}(y_x(\theta_{i+1}^*)) e^{-\lambda\theta_{i+1}^*} \Big\} \cdot e^{\lambda\theta_i^*}.
\end{aligned}$$

从而，(注意 d_{i+1}^* 的定义)

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda\theta_i^*} v^{d_i^*}(y_x(\theta_i^*)) &= \int_{\theta_i^*}^{\theta_{i+1}^*} f^0(y_x(\tau), d_i^*) e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&\quad + v^{d_i^*}(y_x(\theta_{i+1}^*)) e^{-\lambda\theta_{i+1}^*} \qquad (4.42) \\
&= \int_{\theta_i^*}^{\theta_{i+1}^*} f^0(y_x(\tau), d_i^*) e^{-\lambda\tau} d\tau \\
&\quad + e^{-\lambda\theta_{i+1}^*}[v^{d_{i+1}^*}(y_x(\theta_{i+1}^*)) + k(d_i^*, d_{i+1}^*)].
\end{aligned}$$

因此，若对某个 $\theta_{i_0}^* < \infty$，由(4.42)和(4.13)式知

$$
\begin{aligned}
v^{d_0^*}(x) &= \int_0^{\theta^*_{i_0}} f^0(y_x(\tau), d^*(\tau)) e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \sum_{i=1}^{i_0-1} k(a^*_{i-1}, a^*_i) e^{-\lambda\theta^*_i} \\
&\quad + e^{-\lambda\theta^*_{i_0}} v^{d^*_{i_0}}(y_x(\theta^*_{i_0})) \\
&\geqslant \int_0^{\theta^*_{i_0}} f^0(y_x(\tau), d^*(\tau)) e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \sum_{i=1}^{i_0-1} k(a^*_{i-1}, a^*_i) e^{-\lambda\theta^*_i} \\
&\quad - Ce^{-\lambda\theta^*_{i_0}}(1 + \|y_x(\theta^*_{i_0})\|^{r+\delta}) \qquad (4.43) \\
&\geqslant -\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} L[1 + e^{L_0(r+\delta)\tau}(\|x\| + L\tau)^{r+\delta}]\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \sum_{i=1}^{i_0-1} k(d^*_{i-1}, d^*_i) e^{-\lambda\theta^*_i} \\
&\quad - Ce^{-\lambda\theta^*_{i_0}}[1 + e^{L_0(r+\delta)\theta^*_{i_0}}(\|x\| + L\theta^*_{i_0+1})^{r+\delta}] \\
&\geqslant -C(1 + \|x\|^{r+\delta}) + \sum_{i=1}^{i_0-1} k(d^*_{i-1}, d^*_i) e^{-\lambda\theta^*_i}.
\end{aligned}
$$

此处，用到(4.7)式，而C为不同的常数。于是，

$$
\sum_{i=1}^{i_0-1} k(a^*_{i-1}, a^*_i) e^{-\lambda\theta^*_i} \leqslant C(1 + \|x\|^{r+\delta}). \qquad (4.44)
$$

此处C不依赖于i_0，因此，必有

$$
t^*_i \uparrow +\infty. \qquad (4.45)
$$

因为

$$
k(a^*_{i-1}, a^*_i) \geqslant \min_{\tilde{d} \neq \bar{d}} k(\tilde{d}, \bar{d}) > 0, \ \forall i \geqslant 1.
$$

故知$d^*(\cdot) = \sum_{i\geqslant 1} a^*_{i-1}\chi_{(\theta^*_{i-1}, \theta^*_i)}(\cdot) \in \mathscr{S}^a$。从而在(4.43)式的第一个等式中，令$i_0 \to \infty$，并注意到

$$
\begin{aligned}
&|e^{-\lambda\theta^*_{i_0}} v^{d^*_{i_0}}(y_x(\theta_{i_0}))| \leqslant e^{-\lambda\theta^*_{i_0}} C(1 + \|y_x(\theta^*_{i_0})\|^{r+\delta}) \\
&\leqslant Ce^{-\lambda\theta^*_{i_0}}[1 + Le^{L_0(r+\delta)\theta^*_{i_0}}(\|x\| + L\theta^*_{i_0})^{r+\delta}] \to 0.
\end{aligned}
$$

则有

$$v^d(x) \equiv v^{d^*}(x) = \int_0^\infty f^0(y_x(\tau),\ d^*(\tau))e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$+\sum_{i=1}^\infty k(d_{i-1}^*,\ d_i^*)e^{-\lambda\theta_i^*}$$
$$= J_x^d(d^*(\cdot)).$$

因此，由值函数的定义，$d^*(\cdot)$是一个最优转换控制。

因此，对于问题S，只要能找到值函数 $v(\cdot)$，则必可构造性地找到一个最优的转换控制。

上面讨论的是无限时区定常的转换控制问题。现在，简述有限时区非定常的转换控制问题。

令 $T>0$ 为一固定常数，仍设 $\Lambda=\{1,2,\cdots,m\}$，f：$[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^n$，$f^0$：$[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\times\Lambda\to\boldsymbol{R}$，$h$：$\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$，$k$：$[0,T]\times\Lambda\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^+$ 均为连续映照，它们满足下述条件：

(i)′ 存在常数 $L>0$ 和连续函数 ω：$\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，它关于其每个变量均单调增加，满足 $\omega(r,0)=0$，$\forall r\geqslant 0$，使得：$\forall x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$t\in[0,T]$，$d\in\Lambda$，

$$\|f(t,x,d)-f(t,\hat{x},d)\|\leqslant L\|x-\hat{x}\|, \tag{4.46}$$

$$\|f(t,x,d)\|\leqslant L(1+\|x\|), \tag{4.47}$$

$$|f^0(t,x,d)-f^0(t,\hat{x},d)|,\ |h(x)-h(\hat{x})|$$
$$\leqslant\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|), \tag{4.48}$$

$$|f^0(t,0,d)|,\ |h(0)|\leqslant L. \tag{4.49}$$

(ii)′ 对所有的 $d,\hat{d},\tilde{d}\in\Lambda$，$d\neq\hat{d}\neq\tilde{d}$，以及 $0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T$，

$$k(t,d,\tilde{d})<k(t,d,\hat{d})+k(t,\hat{d},\tilde{d}), \tag{4.50}$$

$$k(t,d,d)=0, \tag{4.51}$$

$$k(\hat{t},d,\tilde{d})\leqslant k(t,d,\tilde{d}). \tag{4.52}$$

注意到，上述条件(i)′和(ii)′是与本节开头的(i)和(ii)

对应的。易见，(i)′～(ii)′要比(i)～(ii)来得弱。另外，我们也可将(i)′与§2中的(H1)作比较。由于Λ是有限集，故知(i)′与(H1)实际上是一样的。条件(4.52)是从定常情形所对应的项$e^{-\lambda t}k(d,\bar{d})$具有的类似性质得到启示的。该条件在证明值函数关于$t$的连续性中起关键作用。

现在，定义转换控制函数集。为此，任取$t\in[0,T)$，$d\in\Lambda$，令

$$\mathscr{S}^{t,d}=\{\{d_i,\theta_i\}_{i\geq 0},\ d_0=d,\ \theta_0=t,\ d_i\in\Lambda,\ \theta_i\in[t,T],\ \forall i\geq 1;\ \theta_i\uparrow T;\ d_i\neq d_{i+1},\ \sum_{i\geq 1}k(\theta_i,d_{i-1},d_i)<\infty\}.$$

任何$\{d_i,\theta_i\}_{i\geq 0}\in\mathscr{S}^{t,d}$称为以$t$为初始时刻，$d$为初始值的一个转换控制。与本节开头一样，仍将$\{d_i,\theta_i\}_{i\geq 0}$与

$$d(\cdot)=\sum_{i\geq 1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)$$

等同起来。然后，考虑下述系统：

$$\begin{cases}\dot{y}_{t,x}(s)=f(s,y_{t,x}(s),d(s)),\ \text{a.e.}\ s\in[t,T),\\ y_{t,x}(t)=x.\end{cases}\tag{4.53}$$

而性能指标为

$$J^d_{t,x}(d(\cdot))=\int_t^T f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),d(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_{t,x}(T))+\sum_{i\geq 1}k(\theta_i,d_{i-1},d_i).\tag{4.54}$$

有限时区的最优转换问题可叙述为下述的问题。

问题S′ 对任何给定的$(t,x,d)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\times\Lambda$，寻找$d^*(\cdot)\in\mathscr{S}^{t,d}$，使得

$$J^d_{t,x}(d^*(\cdot))=\inf_{\mathscr{S}^{t,d}}J^d_{t,x}(d(\cdot)).\tag{4.55}$$

定义值函数为

$$\begin{cases} v^d(t,x)=\inf\limits_{\mathcal{S}^{t,d}} J^d_{t,x}(d(\cdot)), \\ \qquad (t,x,d)\in[0,T)\times \mathbf{R}^n\times\Lambda, \\ v(t,x)=(v^1(t,x),v^2(t,x),\cdots\cdots,v^m(t,x)). \\ \qquad (t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{4.56}$$

$$v^d(T,x)=h(x),\quad (x,d)\in\mathbf{R}^n\times\Lambda. \tag{4.57}$$

命题4.4 存在连续函数 $\overline{C}$: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 和 ϖ: $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，$\varpi$ 关于每个变量均单调上升，且 $\varpi(r,0)=0$, $\forall r\geqslant0$, 使得

$$|v^d(t,x)|\leqslant\overline{C}(\|x\|).\ \forall(t,x,d)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\times\Lambda, \tag{4.58}$$

$$|v^d(t,x)-v^d(\hat{t},\hat{x})|\leqslant\varpi(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\|x-\hat{x}\|+|t-\hat{t}|),$$
$$\forall t,\hat{t}\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbf{R}^n,\ d\in\Lambda. \tag{4.59}$$

证 (4.58)式的证明可以综合(2.8)式的证明及(4.13)式的证明。而(4.59)式中关于 x 的局部一致连续性可类似于(2.9)式的证明直接得到。今证明一下(4.59)式中关于 t 的连续性。为此，设 $0\leqslant t<\hat{t}\leqslant T$, 并设

$$|J^d_{t,x}(d(\cdot))-J^d_{t,\hat{x}}(d(\cdot))|\leqslant\omega_1(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\|x-\hat{x}\|),$$
$$\forall(t,x,d)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\times\Lambda. \tag{4.60}$$

此式的证明与(2.11)式相同，且 $\omega_1(\cdot,\cdot)$ 的定义也与(2.13)式相同。于是，对任何 $\hat{d}(\cdot)=\sum\limits_{i\geqslant1}\hat{d}_{i-1}\chi_{[\hat{\theta}_{i-1},\hat{\theta}_i)}(\cdot)\in\mathcal{S}^{\hat{t},d}$，令 $d(\cdot)=\sum\limits_{i\geqslant1}d_{i-1}\chi_{(\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)\in\mathcal{S}^{t,d}$ 如下：

$$\begin{cases}\theta_0=t,\ \theta_i=\hat{\theta}_i,\ i\geqslant1, \\ d_i=\hat{d}_i,\ i\geqslant0,\end{cases} \tag{4.61}$$

则注意到类似于(2.10)式的式子，有

$$v^d(t,x)\leqslant J^d_{t,x}(d(\cdot))$$
$$=\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),d)d\tau+J^d_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})}(\hat{d}(\cdot))$$

$$\int_t^{\hat{t}}[L+\omega(\|y_{t,x}(\tau)\|,\ \|y_{t,x}(\tau)\|)]d\tau+J_{\hat{t},x}^a(\hat{d}(\cdot))$$
$$+\omega_1(\|y_{t,x}(\hat{t})\|\vee\|x\|,\ \|y_{t,x}(\hat{t})-x\|)$$
$$\leqslant[L+\omega(e^{LT}(1+\|x\|),\ e^{LT}(1+\|x\|))](\hat{t}-t)$$
$$+\omega_1(e^{LT}(1+\|x\|),\ Le^{LT}(1+\|x\|)(|\hat{t}-t|)$$
$$+J_{\hat{t},x}^a(\hat{d}(\cdot)).$$

因此，关于 $\hat{d}(\cdot)\in\mathscr{S}^{\hat{t},a}$ 取下确界，得

$$v^a(t,\ x)-v^a(\hat{t},\ x)\leqslant\omega_2(\|x\|,\ |\hat{t}-t|),\qquad(4.62)$$

其中，$\omega_2(\cdot,\ \cdot)$ 的定义是明显的。另一方面，对任何 $d(\cdot)=\sum\limits_{i\geqslant1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)\in\mathscr{S}^{t,a}$，记

$$i_0=\min\{i\geqslant1,\ \theta_i>\hat{t}\},\qquad(4.63)$$

则有

$$\begin{cases}\theta_i\leqslant\hat{t},\ i\leqslant i_0-1,\\ \theta_{i_0}>\hat{t}.\end{cases}\qquad(4.64)$$

令 $\hat{d}(\cdot)=\sum\limits_{i\geqslant1}\hat{d}_{i-1}\chi_{[\hat{\theta}_{i-1},\hat{\theta}_i)}(\cdot)\in\mathscr{S}^{\hat{t},a}$ 如下：

$$\begin{cases}\hat{\theta}_i=\hat{t}, & i\leqslant i_0-1,\\ \hat{\theta}_i=\theta_i, & i\geqslant i_0,\\ \hat{d}_i=d_i, & i\geqslant0.\end{cases}\qquad(4.65)$$

则由(4.50)和(4.52)式知

$$J_{t,x}^a(d(\cdot))=\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,\ y_{t,x}(\tau),\ d(\tau))d\tau$$
$$+\int_{\hat{t}}^T f^0(\tau,\ y_{t,x}(\tau),\ \hat{d}(\tau))d\tau+h(y_{t,x}(T))$$
$$+\sum_{i=1}^{i_0-1}k(\theta_i,\ d_{i-1},\ d_i)+\sum_{i\geqslant i_0}k(\hat{\theta}_i,\ \hat{d}_{i-1},\hat{d}_i)$$
$$\geqslant-\int_t^{\hat{t}}[L+\omega(e^{LT}(1+\|x\|),\ e^{LT}(1+\|x\|))]d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\hat{t}}^{T} f^0(\tau, y_{\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})}(\tau), \hat{d}(\tau)) d\tau \\
&+h(y_{\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})}(T)) \\
&+\sum_{i=1}^{i_0-1} k(\hat{\theta}_i, \hat{d}_{i-1}, \hat{d}_i)+\sum_{i \geqslant i_0} h(\hat{\theta}_i, \hat{d}_{i-1}, \hat{d}_i) \\
=&-[L+\omega(e^{LT}(1+\|x\|), e^{LT}(1+\|x\|))](\hat{t}-t) \\
&+J_{\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})}^{d}(\hat{d}(\cdot)) \\
\geqslant&-\omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|)+J_{\hat{t}, x}^{d}(\hat{d}(\cdot)) \\
\geqslant&-\omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|)+v^d(\hat{t}, x).
\end{aligned}
$$

从而，在上式中关于 $d(\cdot) \in \mathscr{S}^{t,d}$ 取下确界，得

$$
v^d(t, x)-v^d(\hat{t}, x) \geqslant -\omega_2(\|x\|, |t-\hat{t}|). \tag{4.66}
$$

故由(4.62)式综合即得证 $v^d(t, x)$ 关于 t 的连续性。

类似于(4.18)式，定义转换障碍算子 M 如下：

$$
\begin{aligned}
M^d[w](t, x)= & \min_{\bar{d} \in \Lambda, \bar{d} \neq d}\{w^{\bar{d}}(t, x)+k(t, d, \bar{d})\}, \\
& \forall w(\cdot, \cdot):[0, T] \times \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^m, \\
& (t, x, d) \in[0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \Lambda .
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

然后，有下述的定理。

定理 4.5 **(最优性原理)** 值函数 $v(\cdot, \cdot)$ 满足下述条件：

$$
\begin{aligned}
& v^d(t, x) \leqslant M^d[v](t, x), \\
& \forall(t, x, d) \in[0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \Lambda .
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

$$
\begin{aligned}
& v^d(t, x) \leqslant \int_t^{\hat{t}} f(\tau, y_{t,x}(\tau), d) d\tau+v^d(\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})), \\
& \forall 0 \leqslant t \leqslant \hat{t} \leqslant T,(x, d) \in \boldsymbol{R}^n \times \Lambda .
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

此处 $y_{t,x}(\cdot)=y_{t,x}(\cdot\,; d)$。进一步，当(4.68)式在某点$(t_0, x_0) \in[0, T) \times \boldsymbol{R}^n$ 成立严格不等式时，存在 $\bar{t}>t_0$，使得

$$v^d(t_0, x_0) = \int_t^{\hat{t}} f(\tau, y_{t_0,x_0}(\tau) \cdot d)\mathrm{d}\tau + v^d(\hat{t}, y_{t_0,x_0}(\hat{t})),$$

$$\forall \hat{t} \in [t_0, \bar{t}]. \tag{4.70}$$

这个定理的证明与定理 4.2 的证明几乎一样。由此结果，类似于定理 4.3 的证明，立即可得下述定理。

定理 4.6 (HJB 方程) 设值函数 $v(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times \boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{R}^m)$，则它满足下述的 HJB 方程：

$$\begin{cases} \min\{v_t^d(t, x) + (v_x^d(t, x), f(t, x, d)) + f^0(t, x, d), \\ \qquad (t, x, d) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \Lambda, \\ M^d[v](t, x) - v^d(t, x)\} = 0, \\ v^d(T, x) = h(x), (x, d) \in \boldsymbol{R}^n \times \Lambda. \end{cases} \tag{4.71}$$

比较(4.30)与(4.71)，可见它们有许多相似之处。粗略地看，可以认为 $v^d(t, x)$ 与 $e^{-\lambda t}v^d(x)$ 差不多。若注意到这点，(4.71)与(4.30)就是"一样"的了。

最后，类似于定常情形，也可以由值函数 $v(\cdot, \cdot)$ 构造出一个最优控制转换来。我们略去了这个过程。

补充说明一下条件(4.5)和(4.50)的意义。它们表示，在同一时刻从 d 转换到 $\hat{d}$，再转换到 $\tilde{d}$，不如直接从 d 转换到 $\tilde{d}$ 来得便宜。该条件将在以后证明粘性解唯一性时再次用到。

§5 最优脉冲控制问题

本节将讨论另一类非经典的最优控制问题。这类问题的非经典性既出现在指标里，也出现在状态方程中。这类问题称作最优脉冲控制问题，它来源于某些经济问题之中。先来看一个例子。该例子与 §1 中的例子有密切关系。

某商店经销某种商品。设 $x\in\mathbf{R}$ 为该种商品在商店里的储备量。则当没有进货时，$x(\cdot)$满足

$$\dot{x}(t)=-s(t)[x(t)]^{+},\ t\geqslant 0。\tag{5.1}$$

此处 $s(t)$为销售速度。商店进货实际上不是连续的（认为它连续，正如 §1 中的例子，仅仅是一种近似，使得问题变得容易处理）。因此，比如说，在时刻 $t=\tau_1$，商店进货 $\xi_1\geqslant 0$，则有：

$$x(\tau_1+0)=x(\tau_1-0)+\xi_1。\tag{5.2}$$

然后，在 $t\geqslant\tau_1$ 上，仍满足(5.1)式。若在 $t=\tau_2>\tau_1$，商店作第二次进货 $\xi_2\geqslant 0$，则有

$$x(\tau_2+0)=x(\tau_2-0)+\xi_2,\tag{5.3}$$

以此类推。假如在时间区间$[0,T]$上，进货时刻与进货量分别为 τ_j，ξ_j，$j\geqslant 1$。则，形式上，有

$$\dot{x}(t)=-s(t)[x(t)]^{+}+\dot{\xi}(t),\ t\geqslant 0,\tag{5.4}$$

此处，

$$\xi(t)=\sum_{j\geqslant 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,T]}(t),\quad t\in[0,T]。\tag{5.5}$$

而(5.4)式应理解为下述积分方程

$$x(t)=x_0-\int_0^t s(\tau)[x(\tau)]^{+}\mathrm{d}\tau+\xi(t),\ t\in[0,T]\tag{5.6}$$

因此，若以(5.4)或(5.6)式作为系统的状态方程，它显然不是经典的。特别地，此时 $x(\cdot)$甚至都不是连续的！现在，再让我们来看一下其性能指标。首先，仍有销售收入

$$\int_0^T as(t)[x(t)]^{+}\mathrm{d}t$$

和商店储备商品的花费

$$\int_0^T c[x(t)]^{+}\mathrm{d}t。$$

至于购置商品的花费则为

$$\sum_{j\geq 1}[c_0+b\xi_j].$$

此处，b 为单价而 $c_0>0$ 为定金。即在订购时付出的一笔订费。因此，一旦在某时刻 τ_j 决定订货，至少一笔数目为 c_0 的花费已付出。即便在 τ_j 时刻实际上没有购($\xi_j=0$)，此笔数目也是不能收回的。因此，总的盈利为

$$J=\int_0^T\{as(t)[x(t)]^+-c[x(t)]^+\}\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{j\geq 1}[c_0+b\xi_j]. \tag{5.7}$$

可见，性能指标是非经典的。上例中，由(5.4)或(5.6)式知，只要 $x_0\geqslant 0$，则 $x(t)\geqslant 0$，$\forall t\geqslant 0$。因此(5.7)式中$[x(t)]^+$可换成 $x(t)$。上面的例子是一个典型的脉冲控制问题。其中的$\xi(\cdot)$就称为是脉冲控制。

下面给出最优脉冲控制的提法。

设 $K\subseteq \boldsymbol{R}^n$，满足下述条件：

$$\xi_1,\ \xi_2\in K,\ \Rightarrow \xi_1+\xi_2\in K. \tag{5.8}$$

设 $T>0$ 给定，f：$[0,\ T]\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$，$f^0$：$[0,\ T]\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$，$h$：$\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$，$l$：$[0,\ T]\times K\to\boldsymbol{R}^+$ 均为连续映照。我们作如下假设：

(i) 存在常数 $L>0$ 和连续函数 ω：$\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，它关于其每个变量均单调上升，满足 $\omega(r,\ 0)=0$，$\forall r\geqslant 0$，使得：$\forall x$、$\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$t\in[0,\ T]$，

$$\|f(t,\ x)-f(t,\ \hat{x})\|\leqslant L\|x-\hat{x}\|, \tag{5.9}$$

$$\|f(t,\ x)\|\leqslant L(1+\|x\|), \tag{5.10}$$

$$|f^0(t,\ x)-f^0(t,\ \hat{x})|,\ |h(x)-h(\hat{x})|$$
$$\leqslant\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|), \tag{5.11}$$

$$|f^0(t,\ 0)|,\ |h(0)|\leqslant L,$$

$$f^0(t, x), h(x) \geqslant -L. \tag{5.12}$$

(ii) 对所有的 $0 \leqslant t \leqslant \hat{t} \leqslant T$, ξ, $\hat{\xi} \in K$,

$$l(t, \xi+\hat{\xi}) < l(t, \xi) + l(t, \hat{\xi}), \tag{5.13}$$

$$l(\hat{t}, \xi) \leqslant l(t, \xi), \tag{5.14}$$

$$\inf_{(t,\xi) \in [0,T] \times K} l(t, \xi) \equiv l_0 > 0, \tag{5.15}$$

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \inf_{t \in [0,T]} l(t, \xi) = +\infty. \tag{5.16}$$

注意到上述(i)中的(5.9)～(5.11)式与§4中(i)'的相应式子是一样的(只要取 A 为单点集)，但(5.12)式与(4.49)式不同。而(ii)是为了脉冲控制的花费而假设的。现在，我们定义脉冲控制函数集。设 $t \in [0, T)$，置

$$\begin{aligned}\mathscr{K}[t, T] = \{\xi(\cdot) = \sum_{j \geqslant 1} \xi_j \chi_{[\tau_j, T]}(\cdot); [t, T] \\ \to K, \tau_1 \geqslant t, \tau_j \uparrow T, \xi_j \in K, \forall j \geqslant 1; \\ \sum_{j \geqslant 1} l(\tau_j, \xi_j) < \infty\}.\end{aligned}$$

任何 $\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t, T]$称为一个脉冲控制。容易知道，由条件(5.15)，对任何 $\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t, T]$，存在一个整数 $I(\xi(\cdot))$，使得

$$\xi(\cdot) = \sum_{j=1}^{I(\xi(\cdot))} \xi_j \chi_{[\tau_j, T]}(\cdot). \tag{5.17}$$

对于任何的 $(t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$ 和 $\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t, T]$，受控系统为(形式地)

$$\begin{cases} \dot{y}_{t,x}(s) = f(s, y_{t,x}(s)) + \dot{\xi}(s), s \in [t, T], \\ y_{t,x}(t) = x. \end{cases} \tag{5.18}$$

由于 $\xi(\cdot)$ 仅是一个分段常值函数，故(5.18)式的意义并不太明确。我们以下面的方式来理解(5.18)式。

$$y_{t,x}(s) = x + \int_t^s f(\tau, y_{t,x}(\tau)) \mathrm{d}\tau + \xi(s),$$

$$t \leqslant s \leqslant T. \tag{5.19}$$

由此可见，$y_{t,x}(\cdot)$ 与 $\xi(\cdot)$ 具有相同的跳跃点及跳跃度。对应的性能指标为

$$J_{t,x}(\xi(\cdot)) = \int_t^T f^0(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau + h(y_{t,x}(T)) + \sum_{j \geqslant 1} l(\tau_j, \xi_j). \tag{5.20}$$

此处，$\xi(\cdot) = \sum_{j \geqslant 1} \xi_j \chi_{[\tau_j, T]}(\cdot)$。当 $\xi(\cdot)$，$y_{t,x}(\cdot)$ 和 $\{\tau_j, \xi_j\}$ 同时出现时，由上下文立即可以确定它们之间的关系。因此，除非会有可能的混淆。否则，不每次指出它们的关系。最优脉冲控制问题可以叙述为下列问题。

问题 I　对给定的 $(t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$，寻找 $\xi^*(\cdot) \in \mathscr{K}[t, T]$，使得

$$J_{t,x}(\xi^*(\cdot)) = \inf_{\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t,T]} J_{t,x}(\xi(\cdot)). \tag{5.21}$$

需要注意的是，在条件(5.9)下，对任何的 $\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t, T]$，方程(5.19)至多存在一个解，而注意到(5.10)和(5.17)式，对任何 $\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t, T]$，(5.19) 式的任何解是有界的。综合此两点，可知对给定的 $(t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$，$y_{t,x}(\cdot)$ 由 $\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t, T]$ 唯一地确定，且在整个$[t, T]$上有定义。由此可知，(5.20) 式的定义是明确的。从而，问题 I 是有意义的。现在，定义问题 I 的值函数如下：

$$v(t, x) = \inf_{\xi(\cdot) \in \mathscr{K}[t,T]} J_{t,x}(\xi(\cdot)), \quad (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n. \tag{5.22}$$

注意，此时的值函数仍是一个数值函数。因此，问题 I 显然与问题 S′ 是不同的两类非经典问题。但是，我们将会看到这两类问题有许多相似之处。

对于上面的有限时区上的最优脉冲控制问题，由于轨线

$y_{t,x}(\cdot)$都未必是 t 的连续函数。因此，值函数 $v(t,x)$ 关于 t 的连续性是非常不显然的。我们将要证明类似于命题 4.4 的结果。为此，先给出下面的命题。

命题 5.1 对任何 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}[t,T]$, $x,\hat{x}\in\mathbf{R}^n$, $s\in[t,T]$，有

$$\|y_{t,x}(s)\|\leqslant e^{L(s-t)}(1+\|x\|)+\|\xi(s)\| \\ +L\int_t^s e^{L(s-\tau)}\|\xi(\tau)\|\mathrm{d}\tau. \tag{5.23}$$

$$\|y_{t,x}(s)-y_{t,\hat{x}}(s)\|\leqslant e^{L(s-t)}\|x-\hat{x}\|. \tag{5.24}$$

证 由条件(5.10)知

$$\|y_{t,x}(s)\|\leqslant\|x\|+\int_t^s L(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau+\|\xi(s)\|,$$

所以

$$1+\|y_{t,x}(s)\|\leqslant 1+\|x\| \\ +\int_t^s L(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau+\|\xi(s)\|,\quad s\in[t,T]. \tag{5.25}$$

于是利用第一章引理 2.5（注意，此时对应的 $\varphi(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$都未必是连续的），我们有

$$\begin{aligned}1+\|y_{t,x}(s)\|&\leqslant 1+\|x\|+\|\xi(s)\| \\ &\quad+\int_t^s Le^{L(s-\tau)}[1+\|x\|+\|\xi(\tau)\|]\mathrm{d}\tau \\ &=e^{L(s-t)}(1+\|x\|)+\|\xi(s)\| \\ &\quad+\int_t^s Le^{L(s-\tau)}\|\xi(\tau)\|\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

故得到 (5.23) 式。(5.24) 式的证明与第一章命题 2.6 的相同。

现在，证明值函数 $v(t,x)$的连续性。

命题 5.2 存在连续函数 $\bar{c}$: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 和 $\bar{\omega}$: $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to$

$\boldsymbol{R}^+$，$\bar{\omega}$ 关于它的每个变量均单调上升，$\bar{\omega}(r, 0)=0$，$\forall r\geqslant 0$，使得 $\forall t, \hat{t}\in[0, T]$，$x, \hat{x}\in \boldsymbol{R}^n$，

$$-(T+1)L\leqslant v(t, x)\leqslant \bar{c}(\|x\|), \tag{5.26}$$

$$|v(t, x)-v(\hat{t}, \hat{x})|\leqslant \bar{\omega}(\|x\|\vee\|\hat{x}\|, \|x-\hat{x}\|+|t-\hat{t}|). \tag{5.27}$$

证　首先，令 $\xi_0(\cdot)\in\mathscr{K}[t, T]$为无脉冲的脉冲控制，则

$$\begin{aligned} v(t, x) &\leqslant J_{t,x}(\xi_0(\cdot)) \\ &=\int_t^T f^0(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_{t,x}(T)) \\ &\leqslant\int_t^T [L+\omega(\|y_{t,x}(\tau)\|, \|y_{t,x}(\tau)\|)]\mathrm{d}\tau \\ &\quad +L+\omega(\|y_{t,x}(T)\|, \|y_{t,x}(T)\|) \qquad (5.28)\\ &\leqslant(T+1)[L+\omega(e^{LT}(1+\|x\|), e^{LT}(1+\|x\|))] \\ &\equiv\bar{c}(\|x\|). \end{aligned}$$

此处，由于 $\xi_0(\cdot)$无脉冲，故性能指标中的项 $\sum\limits_{j\geqslant 1} l(\tau_j, \xi_j)$消失，且(5.23)估计式中，$\|\xi_0(s)\|$为 0，从而有上面的估计。另一方面，对任何的 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}[t, T]$，由 $l(\cdot, \cdot)$ 的非负性以及条件(5.12)知

$$\begin{aligned} J_{t,x}(\xi(\cdot)) &\geqslant\int_t^T f^0(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau+h(y_{t,x}(T)) \\ &\geqslant-(T+1)L. \end{aligned} \tag{5.29}$$

因此，关于 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}[t, T]$ 取下确界，然后综合(5.28)式立即得到(5.26)式。

今置

$$\mathscr{K}_r[t, T]=\{\xi(\cdot)=\sum_{j\geqslant 1}\xi_j\chi_{[\tau_j, T]}(\cdot)\in\mathscr{K}[t, T], \\ \sum_{j\geqslant 1} l(\tau_j, \xi_j)\leqslant c(r)+(T+1)L\}.$$

则对任何 $\xi(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,T]}(\cdot)\notin\mathscr{K}_{\|x\|}(\cdot)[t,T]$，有

$$J_{t,x}(\xi(\cdot))=\int_t^T f^0(\tau,y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau$$
$$+h(y_{t,x}(T))+\sum_{j\geq 1}l(\tau_j,\xi_j) \tag{5.30}$$
$$>-(T+1)L+\bar{c}(\|x\|)+(T+1)L$$
$$=\bar{c}(\|x\|).$$

因此，由已证的(5.26)式知

$$v(t,x)=\inf_{\xi(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|}[t,T]}J_{t,x}(\xi(\cdot)). \tag{5.31}$$

而对任何 $\xi(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,T]}(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|}[t,T]$，由 (5.15)和(5.17)式知

$$I(\xi(\cdot))\leqslant\frac{1}{l_0}[\bar{c}(\|x\|)+(T+1)L]. \tag{5.32}$$

再由(5.16)式知存 $\in\hat{c}(\|x\|)$，使得

$$\sum_{j=1}^{I(\xi(\cdot))}\|\xi_j\|\leqslant\hat{c}(\|x\|), \tag{5.33}$$

于是，对任何的$(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n$，$\xi(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|}[t,T]$，有(见(5.23)式)

$$\|y_{t,x}(s)\|\leqslant e^{L(s-t)}(1+\|x\|)+\hat{c}(\|x\|)$$
$$+L\int_t^s e^{L(s-\tau)}\hat{c}(\|x\|)\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant e^{L(s-t)}(1+\|x\|+\hat{c}(\|x\|)) \tag{5.34}$$
$$\leqslant e^{LT}(1+\|x\|+\hat{c}(\|x\|))\equiv\tilde{c}(\|x\|),$$
$$\forall s\in[t,T].$$

因此，对任何的 $t\in[0,T]$，$x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$\xi(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|\vee\|\hat{x}\|}[t,T]$，有

$$|J_{t,x}(\xi(\cdot))-J_{t,\hat{x}}(\xi(\cdot))|$$
$$\leqslant\int_t^T\omega(\|y_{t,x}(\tau)\|\vee\|y_{t,\hat{x}}(\tau)\|,\ \|y_{t,x}(\tau)-y_{t,\hat{x}}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau \tag{5.35}$$

$$+\omega(\|y_{t,x}(T)\|\vee\|y_{t,\hat{x}}(T)\|,\ \|y_{t,x}(T)-y_{t,\hat{x}}(T)\|)$$
$$\leqslant(T+1)\omega(\tilde{c}(\|x\|\vee\|\hat{x}\|),\ e^{LT}\|x-\hat{x}\|)$$
$$\triangleq\tilde{\omega}_1(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|)。$$

从而，得到

$$|v(t,\ x)-v(t,\ \hat{x})|\leqslant\tilde{\omega}_1(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|)。\quad(5.36)$$

今再证 $v(t,\ x)$关于 t 的连续性。为此，设 $0\leqslant t<\hat{t}\leqslant T$。对任何的 $\hat{\xi}(\cdot)\in\mathscr{K}[\hat{t},\ T]$，作 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}[t,\ T]$如下：$\xi(\cdot)$在$[t,\hat{t})$上无脉冲，而在$[\hat{t},T]$与$\hat{\xi}(\cdot)$相同。则

$$\begin{aligned}
v(t,\ x)&\leqslant J_{t,x}(\xi(\cdot))\\
&=\int_t^{\hat{t}}f^0(\tau,\ y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau+J_{\hat{t},y_{t,x}(\hat{t}-0)}(\hat{\xi}(\cdot))\\
&\leqslant\int_t^{\hat{t}}[L+\omega(\|y_{t,x}(\tau)\|,\ \|y_{t,x}(\tau)\|)]\mathrm{d}\tau\\
&\quad+J_{\hat{t},x}(\hat{\xi}(\cdot))+\tilde{\omega}_1(\|y_{t,x}(\hat{t})\|\vee\|x\|,\\
&\quad\|y_{t,x}(\hat{t}-0)-x\|)\qquad(5.37)\\
&\leqslant\tilde{c}(\|x\|)(\hat{t}-t)+\tilde{\omega}_1(e^{LT}(1+\|x\|),\\
&\quad L(1+\|x\|)e^{LT}|\hat{t}-t|)+J_{\hat{t},x}(\hat{\xi}(\cdot))。
\end{aligned}$$

此处，需注意，由于$\xi(\cdot)$在$[t,\hat{t})$上无脉冲，故可用估计式第一章的(2.24)式)。于是，关于$\hat{\xi}(\cdot)\in\mathscr{K}[\hat{t},\ T]$取下确界得

$$\begin{aligned}
v(t,\ x)-v(\hat{t},\ x)&\leqslant\tilde{c}(\|x\|)|t-\hat{t}|\\
&\quad+\tilde{\omega}_1(e^{LT}(1+\|x\|),\ L(1+\|x\|)e^{LT}|t-\hat{t}|)。\quad(5.38)
\end{aligned}$$

另一方面，对于任何 $\xi(\cdot)=\sum\limits_{j\geqslant1}\xi_j\chi_{[\tau_j,T]}(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|}[t,\ T]$，令

$$j_0=\min\{j\geqslant1,\ \tau_j>\hat{t}\}。\qquad(5.39)$$

则有

$$\begin{cases}\tau_j\leqslant\hat{t},\ \forall j\leqslant j_0-1,\\ \tau_{j_0}>\hat{t},\end{cases}\qquad(5.40)$$

定义 $\hat{\xi}(\cdot)=\sum\limits_{j\geqslant1}\hat{\xi}_j\chi_{[\hat{\tau}_j,T]}(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|}[\hat{t},\ T]$如下：

$$\begin{cases} \hat{\tau}_j = \hat{t}, & \forall j \leqslant j_0 - 1, \\ \hat{\tau}_j = \tau_j, & \forall j \geqslant j_0, \\ \hat{\xi}_j = \xi_j, & \forall j \geqslant 1 \end{cases} \tag{5.41}$$

则有(记 $\hat{y}_{\hat{t},x}(\cdot) = y_{\hat{t},x}(\cdot\,;\hat{\xi}(\cdot))$)

$$\begin{aligned} J_{t,x}(\xi(\cdot)) = &\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau + J_{\hat{t},x}(\hat{\xi}(\cdot)) \\ &+ \int_{\hat{t}}^T [f^0(\tau, y_{t,x}(\tau)) - f^0(\tau, \hat{y}_{\hat{t},x}(\tau))]\mathrm{d}\tau \\ &+ h(y_{t,x}(T)) - h(\hat{y}_{\hat{t},x}(T)) \\ &+ \sum_{j=1}^{j_0-1} l(\tau_j, \xi_j) - \sum_{j=1}^{j_0-1} l(\hat{\tau}_j, \xi_j) \\ \geqslant & - L(\hat{t} - t) + J_{\hat{t},x}(\hat{\xi}(\cdot)) \\ &- \int_{\hat{t}}^T \omega(\|y_{t,x}(\tau)\| \vee \|\hat{y}_{\hat{t},x}(\tau)\|, \\ &\quad \|y_{t,x}(\tau) - \hat{y}_{\hat{t},x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau \\ &- \omega(\|y_{t,x}(T)\| \vee \|\hat{y}_{\hat{t},x}(T)\|, \\ &\quad \|y_{t,x}(T) - \hat{y}_{\hat{t},x}(T)\|) \\ &+ \sum_{j=1}^{j_0-1} l(\hat{t}, \xi_j) - \sum_{j=1}^{j_0-1} l(\hat{\tau}_j, \xi_j) \\ \geqslant & - L(\hat{t} - t) + v(\hat{t}, x) \\ &- \int_{\hat{t}}^T \omega(\bar{c}(\|x\|), \|y_{t,x}(\tau) - \hat{y}_{\hat{t},x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau \\ &- \omega(\bar{c}(\|x\|), \|y_{t,x}(T) - \hat{y}_{\hat{t},x}(T)\|). \end{aligned} \tag{5.42}$$

注意到，$\forall s \in [\hat{t}, T]$，

$$\begin{aligned} \|y_{t,x}(s) - \hat{y}_{\hat{t},x}(s)\| \leqslant & \left\|\int_t^{\hat{t}} f(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau\right\| \\ &+ \left\|\int_{\hat{t}}^s [f(\tau, y_{t,x}(\tau)) - f(\tau, \hat{y}_{\hat{t},x}(\tau))]\mathrm{d}\tau\right\| \\ &+ \|\xi(s) - \hat{\xi}(s)\| \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\leqslant \int_t^{\hat{t}} L(1+\|y_{t,x}(\tau)\|)\mathrm{d}\tau + \int_{\hat{t}}^s L\|y_{t,x}(\tau) - y_{\hat{t},x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \int_t^{\hat{t}} L[1+\bar{c}(\|x\|)]\mathrm{d}\tau + \int_{\hat{t}}^s L\|y_{t,x}(\tau) - y_{\hat{t},x}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

因此，由第一章引理 2.5 知

$$\|y_{t,x}(s) - y_{\hat{t},x}(s)\| \leqslant L[(1+\bar{c}(\|x\|)]e^{LT}|t-\hat{t}|,$$
$$s \in [\hat{t}, T]. \tag{5.44}$$

故由(5.42)式知，$\forall \xi(\cdot) \in \mathscr{K}_{\|x\|}[t, T]$，

$$J_{t,x}(\xi(\cdot)) \geqslant -L(\hat{t}-t) + v(\hat{t}, x)$$
$$+ (T+1)\omega(\bar{c}(\|x\|), L(1+\bar{c}(\|x\|)]e^{LT}|t-\hat{t}|), \tag{5.45}$$

所以，关于 $\xi(\cdot) \in \mathscr{K}_{\|x\|}[t, T]$ 取下确界知

$$v(t, x) - v(\hat{t}, x) \geqslant -L|t-\hat{t}| + (T+1)\omega(\bar{c}(\|x\|),$$
$$L[1+\bar{c}(\|x\|)e^{LT}|t-\hat{t}|). \tag{5.46}$$

综合(5.33)和(5.36)式，便得(5.27)式。

$v(t, x)$关于 t 的连续性的证明与命题4.4 中相应的结论的证明是很相似的。

对于最优脉冲问题，定义所谓的脉冲障碍算子 N 如下：

$$\forall w: [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R},$$

$$N[w](t, x) = \inf_{\xi \in K} \{w(t, x+\xi) + l(t, \xi)\},$$
$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n, \tag{5.47}$$

然后，有下述的最优性原理。

定理 5.3 （最优性原理） 值函数 $v(\cdot, \cdot)$ 满足下述条件

$$v(t, x) \leqslant N[v](t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n. \tag{5.48}$$

$$v(t, x) \leqslant \int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t,x}(\tau))\mathrm{d}\tau + v(\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t})), \tag{5.49}$$

$$\forall 0 \leqslant t \leqslant \hat{t} \leqslant T, x \in \boldsymbol{R}^n.$$

此处，$y_{t,x}(\cdot)$是对应无脉冲控制的系统的轨线。进一步，若(5.48)式在某点$(t_0, x_0) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$成立严格不等式，则存在$\bar{t} \in (t_0, T]$，使得

$$
v(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t_0, x_0}(\tau))\mathrm{d}\tau + v(\hat{t}, y_{t_0, x_0}(\hat{t})),
$$

$$
\forall \hat{t} \in [t_0, \bar{t}], \tag{5.50}
$$

而上述式中的$y_{t_0, x_0}(\cdot)$仍为无脉冲控制对应的轨线。

上述定理的证明与最优转换时的情形相类似，我们将详细证明过程留给读者。利用上述定理，也可以很容易地证明下述结果。

定理 5.4 (HJB 方程) 设值函数$v(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times \boldsymbol{R}^n)$，则它满足下述的HJB方程：

$$
\begin{cases}
\min\{v_t(t, x) + (v_x(t, x), f(t, x)) + f^0(t, x), \\
\qquad N[v](t, x) - v(t, x)\} = 0, \\
\qquad\qquad (t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n, \\
v(T, x) = h(x), \ x \in \boldsymbol{R}^n.
\end{cases} \tag{5.51}
$$

我们发现，(5.51)与(4.71)很相象。但有两点值得注意：第一，(5.51)只有一个方程，而(4.71)是一个方程组；第二，转换障碍算子M是一个局部算子，即$M^a[v](t, x)$仅依赖于$v(\cdot, \cdot)$在(t, x)点的值，而脉冲障碍算子N则是一个整体的算子，即$N[v](t, x)$依赖于$\{v(t, \hat{x});\hat{x} \in \boldsymbol{R}^n\}$。所以，这两类问题所对应的HJB方程是有很大差别的。

另外，对于脉冲控制问题，在证明值函数连续性时，f^0和h的下有界性起很关键的作用(见(5.30)和(5.42)式)。

类似于§4，利用值函数，可以构造出一个最优脉冲控制。因此，问题的关键又集中到值函数的确定，而这需要严格的粘性解理论。条件(5.13)在构造最优脉冲控制时要用到，

在今后证明粘性解唯一性时也将再次用到，该条件的意义是指：在同一时刻，作两次脉冲不如将两次脉冲合在一起来得便宜。这有点类似于§4中相应的条件。

对于无限时区定常情形，将其合并到下一节去讨论。

在本节的最后部分，将指出处理最优脉冲控制问题的另一种可能的方法。我们仅考虑(5.19)～(5.20)，即有限时区问题。引入下述变换：

$$z_{t,x}(s)=y_{t,x}(s)-\xi(s). \tag{5.52}$$

则(5.19)系统可以化为

$$z_{t,x}(s)=x+\int_t^s f(\tau,\ z_{t,x}(\tau)+\xi(\tau))\mathrm{d}\tau,\ \ s\in[t,\ T], \tag{5.53}$$

而指标(5.20)式变为

$$J_{t,x}(\xi(\cdot))=\int_t^T f^0(\tau,\ z_{t,x}(\tau)+\xi(\tau))\mathrm{d}\tau + h(z_{t,x}(T)+\xi(T))+\sum_{j\geq 1} l(\tau_j,\ \xi_j). \tag{5.54}$$

利用这样的方法，可知系统（5.53）仍然是经典的，而指标(5.54)的非经典性不仅出现在多一项和式，而且在终端惩罚项 $h(z_{t,x}(T)+\xi(T))$ 也出现控制 $\xi(T)$。由于变换(5.52)式是可逆的，故在现在的框架下，也可以完全得到前面类似的结果。在此就不给出详细细节了。

§6 混合控制问题

前面，我们分别介绍了经典的最优控制问题、最优转换控制问题和最优脉冲控制问题。在这一节中，将讨论上述三类问题混合在一起的情形，称之为混合控制问题。

首先，讨论无限时区定常情形。

设 U 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个可测集，$\Lambda=\{1, 2, \cdots, m\}$ 而 K 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个闭集，满足下述条件：

$$\xi, \hat{\xi}\in K\Rightarrow \xi+\hat{\xi}\in K. \tag{6.1}$$

设 $f: \boldsymbol{R}^n\times U\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^n$, $f^0: \boldsymbol{R}^n\times U\times\Lambda\to\boldsymbol{R}$, $k: \Lambda\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^+$, $l: K\to\boldsymbol{R}^+$。均为连续函数，它们满足下述条件：

(i) 存在常数 L, $L_0\geqslant 0$, $0<\delta\leqslant 1$，使得对任何的 x, $\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $u\in U$, $d\in\Lambda$,

$$\|f(x, u, d)-f(\hat{x}, u, d)\|\leqslant L_0\|x-\hat{x}\|, \tag{6.2}$$

$$\|f(x, u, d)\|\leqslant L+L_0\|x\|, \tag{6.3}$$

$$|f^0(x, u, d)-f^0(\hat{x}, u, d)|\leqslant L\|x-\hat{x}\|^\delta. \tag{6.4}$$

$$-L\leqslant f^0(x, u, d)\leqslant L(1+\|x\|^\delta). \tag{6.5}$$

(ii) 对所有的 d, $\hat{d}$, $\tilde{d}\in\Lambda$, $d\neq\hat{d}\neq\tilde{d}$,

$$k(d, \tilde{d})<k(d, \hat{d})+k(\hat{d}, \tilde{d}). \tag{6.6}$$

$$k(d, d)=0. \tag{6.7}$$

(iii) 对所有的 ξ, $\hat{\xi}\in K$,

$$l(\xi+\hat{\xi})<l(\xi)+l(\hat{\xi}). \tag{6.8}$$

$$\inf_{\xi\in K} l(\xi)=l_0>0. \tag{6.9}$$

另外，设

$$\lambda>L_0\delta. \tag{6.10}$$

现在，引入下面的集合：

$$\mathscr{U}=\{u(\cdot): [0, \infty)\to U, u(\cdot)\text{可测}\},$$

$$\mathscr{S}^d=\{d(\cdot)=\sum_{i\geqslant 1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1}, \theta_i)}(\cdot): [0, \infty)\to\Lambda, d_0=d,$$

$$\theta_0=0, d_i\in\Lambda, \theta_i\in[0, +\infty], \forall i\geqslant 1, \theta_i\uparrow+\infty,$$

$$\text{当 }\theta_{i+1}<\infty\text{ 时 }d_{i+1}\neq d_i; \sum_{i\geqslant 1}k(d_{i-1}, d_i)e^{-\lambda\theta_i}<\infty\}$$

$$d\in\Lambda,$$

$$\mathscr{K}=\{\xi(\cdot)=\sum_{j\geqslant1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot):[0,\infty)\to K,\ \tau_j\geqslant0,$$

$$\xi_j\in K,\ \forall i\geqslant1,\ \tau_j\uparrow+\infty;\ \sum_{j\geqslant1}l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}<\infty\}.$$

对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$，$d(\cdot)\in\mathscr{S}^d$ 和 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}$ 分别称为连续实施控制、转换控制和脉冲控制．现在，对任何的 $(u(\cdot),d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{U}\times\mathscr{S}^d\times\mathscr{K}$，考虑下述受控系统：

$$\begin{cases}\dot{y}_x(t)=f(y_x(t),u(t),d(t))+\dot{\xi}(t),\ t\geqslant0,\\ y_x(0^-)=x.\end{cases}\tag{6.11}$$

以下述方式理解上面的系统：$y_x(\cdot)$ 为(6.11)的解，当且仅当下面积分方程满足：

$$y_x(t)=x+\int_0^t f^0(y_x(\tau),u(\tau),d(\tau))\mathrm{d}\tau+\xi(t),\ t\geqslant0.\tag{6.12}$$

这里，$y_x(\cdot)$ 也是依赖于 $(u(\cdot),d(\cdot),\xi(\cdot))$ 的．

命题 6.1 对任何的 $(u(\cdot),d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{U}\times\mathscr{S}^d\times\mathscr{K}$，以及 $x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，

$$\|y_x(t)\|\leqslant e^{L_0t}\{\|x\|+Lt+\sum_{j\geqslant1}e^{-L_0\tau_j}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\},$$

$$t\geqslant0,\tag{6.13}$$

$$\|y_x(t)-y_{\hat{x}}(t)\|\leqslant e^{L_0t}\|x-\hat{x}\|,\quad t\geqslant0.\tag{6.14}$$

证 由命题 5.1 的证明，立即可得(6.14)式，并且也有

$$\|y_x(t)\|\leqslant e^{L_0t}(\|x\|+Lt)+\|\xi(t)\|$$

$$+L_0\int_0^t e^{-L_0(t-\tau)}\|\xi(\tau)\|\mathrm{d}\tau,\tag{6.15}$$

而

$$L_0\int_0^t e^{-L_0(t-\tau)}\|\xi(\tau)\|\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant\sum_{j\geqslant1}L_0\int_0^t e^{-L_0(t-\tau)}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_{j\geq 1}L_0\int_{\tau_j}^{t}e^{-L_0(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)$$

$$=\sum_{j\geq 1}e^{-L_0(t-\tau_j)}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)-\sum_{j\geq 1}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t).$$

从而代入(6.15)式，得到(6.13)式。

由(6.13)式和条件(6.5)知(注意 $\delta\leqslant 1$)

$$\begin{aligned}&|f^0(y_x(t),u(t),d(t))|e^{-\lambda t}\\&\leqslant L(1+\|y_x(t)\|^\delta)e^{-\lambda t}\\&\leqslant Le^{-\lambda t}+Le^{-\lambda t}e^{L_0\delta t}\{\|x\|^\delta+L^\delta t^\delta\\&\quad+\sum_{j\geq 1}e^{-L_0\delta\tau_j}\|\xi_j\|^\delta\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\}\qquad(6.16)\\&=Le^{-\lambda t}+Le^{-(\lambda-L_0\delta)t}[\|x\|^\delta+L^\delta t^\delta]\\&\quad+Le^{-(\lambda-L_0\delta)t}[\sum_{j\geq 1}e^{-L_0\tau_j}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)]^\delta.\end{aligned}$$

由条件(6.10)知上式前两项在 $[0,\infty)$ 上积分总存在．但第三项一般不能保证在 $[0,\infty)$ 上的可积性。但上述启发我们作下述的定义：

$$\hat{\mathscr{X}}=\{\xi(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{X},\ \sum_{j\geq 1}e^{-L_0\tau_j}\|\xi_j\|<\infty\}.$$

易知，当 $\xi(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\hat{\mathscr{X}}$ 时，

$$\sup_{t\geq 0}\sum_{j\geq 1}e^{-L_0\tau_j}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)=\sum_{j\geq 1}e^{-L_0\tau_j}\|\xi_j\|<\infty\},\quad(6.17)$$

从而保证了(6.16)式中第三项在 $[0,\infty)$ 上的可积性。于是，对任何的 $(u(\cdot),d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{U}\times\mathscr{S}^d\times\hat{\mathscr{X}}$，可定义下面的泛函

$$J_x^d(u(\cdot),d(\cdot),\xi(\cdot))=\int_0^\infty f^0(y_x(t),u(t),d(t))e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$+\sum_{i\geq 1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}+\sum_{j\geq 1}l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}.\qquad(6.18)$$

上式右端的三项分别表示运行、转换和脉冲花费。

在 §5 中讨论有限时区脉冲控制问题时，由脉冲控制的定

义，立即得知在$[0, T]$上的脉冲次数总是有限的。从而，运行花费总有意义(见(5.20)式)。而在这里，一般而言，即使$\xi(\cdot)\in\hat{\mathscr{K}}$，它在$[0,\infty)$上也可能作无限次脉冲。从而，为使(6.18)中积分项有意义，对脉冲控制作了一些限制。不过，$\hat{\mathscr{K}}$仍不失为一个很大的脉冲控制类，特别地，它包含了所有在$[0,\infty)$上仅作有限次脉冲的控制。

下面叙述最优控制问题。

问题 CSI，对任何给定的$(x, d)\in \boldsymbol{R}^n\times\Lambda$，寻找$(u^*(\cdot), d^*(\cdot), \xi^*(\cdot))\in\mathscr{U}\times\mathscr{S}^d\times\hat{\mathscr{K}}$，使得

$$J_x^d(u^*(\cdot), d^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) = \inf_{\mathscr{U}\times\mathscr{S}^d\times\hat{\mathscr{K}}} J_x^d(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)). \tag{6.19}$$

当U和Λ为单点集时，上述问题正是无限时区定常的最优脉冲控制问题。在上节末尾，我们已将无限时区定常的脉冲控制问题并在此节中讨论。因此，在下面讨论中，只要将U和Λ取成单点集，就得到所要的有关无限时区定常最优脉冲控制问题的结论。当Λ为单点集，$K=\phi$时，问题是经典的；当U为单点集，$K=\phi$时，问题即为最优转换问题。不过，由于脉冲的出现，不得不假设略强的条件(6.4)和(6.5)。因此，这里的问题不完全包含前面讨论过的问题。另外，若取Λ为单点集，在问题中，仅连续实施控制和脉冲控制同时出现；若取U为单点集，在问题中，仅转换与脉冲控制同时出现；而若取$K=\phi$，在问题中，仅连续实施控制和转换控制同时出现。可见，上述问题还包含其它一些混合控制问题。

下面，定义问题 CSI 的值函数。定义

$$\begin{cases} v^d(x) = \inf\limits_{\mathscr{U}\times\mathscr{S}^d\times\hat{\mathscr{K}}} J_x^d(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)), \\ (x, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda, \end{cases} \tag{6.20}$$

$$| v(x) = (v^1(x), v^2(x), \cdots v^m(x)), \quad x \in \boldsymbol{R}^n.$$

命题 6.2 存在常数 $C_0>0$（仅依赖于 L, L_0, δ, λ），使得

$$-\frac{L}{\lambda} \leqslant v^d(x) \leqslant C_0(1+\|x\|^\delta), \ \forall (x, d) \in \boldsymbol{R}^n \times \Lambda, \quad (6.21)$$

$$|v^d(x) - v^d(\hat{x})| \leqslant C_0 \|x - \hat{x}\|^\delta, \ \forall x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n, d \in \Lambda. \quad (6.22)$$

证　首先，对任何的 $(x, d) \in \boldsymbol{R}^n \times \Lambda$，及 $(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathscr{U} \times \mathscr{S}^d \times \hat{\mathscr{K}}$，由(6.5)式知

$$J_x^d(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)) \geqslant \int_0^\infty -Le^{-\lambda t}\mathrm{d}t = -\frac{L}{\lambda}. \quad (6.23)$$

故，关于$(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathscr{U} \times \mathscr{S}^d \times \hat{\mathscr{K}}$ 取下确界，即得

$$v^d(x) \geqslant -\frac{L}{\lambda}. \quad (6.24)$$

今取定 $u(\cdot) \in \mathscr{U}$，令 $d_0(\cdot) \in \mathscr{S}^d$ 为无转换控制（即对应的 $\theta_1 = +\infty$），$\xi_0(\cdot)$为无脉冲控制（即对应的 $\tau_1 = +\infty$），则有

$$\begin{aligned} v^d(x) &\leqslant J_x^d(u(\cdot), d_0(\cdot), \xi_0(\cdot)) \\ &= \int_0^\infty f^0(y_x(t), u(t), d)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^\infty L(1+\|y_x(t)\|^\delta)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \qquad (6.25) \\ &\leqslant \int_0^\infty L\{1+e^{L_0\delta t}(\|x\|+Lt)^\delta\}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\ &\leqslant C_0(1+\|x\|^\delta). \end{aligned}$$

所以(6.21)式得证。今对任何的 $x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n, d \in \Lambda$ 以及$(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathscr{U} \times \mathscr{S}^d \times \hat{\mathscr{K}}$，有

$$\begin{aligned} &|J_x^d(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)) - J_{\hat{x}}^d(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot))| \\ \leqslant &\int_0^\infty L\|y_x(t) - y_{\hat{x}}(t)\|^\delta e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \qquad (6.26) \end{aligned}$$

$$\leqslant\int_0^\infty Le^{(L_0\delta-\lambda)t}\|x-\hat{x}\|^\delta dt=\frac{L}{\lambda-L_0\delta}\|x-\hat{x}\|^\delta.$$

因此，关于$(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot))\in\mathscr{U}\times\mathscr{S}^d+\hat{\mathscr{K}}$取下确界，得(6.22)式。

由于f^0是关于x一致Hölder连续的（条件(6.4)），故利用(6.2)及(6.10)式，很容易地得到(6.26)式。

定理 6.3 **（最优性原理）** 值函数$v(\cdot)$满足下述条件：对任何$(x, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda$, $t>0$,

$$v^d(x)\leqslant\min\{M^d[v](x),\ N[v^d](x)\},\qquad(6.27)$$

$$v^d(x)\leqslant\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}\left\{\int_0^t f^0(y_x(\tau), u(\tau), d)e^{-\lambda\tau}d\tau\right.$$
$$\left.+v^d(y_x(t))e^{-\lambda t}\right\},\qquad(6.28)$$

此处，$y_x(\cdot)$是对应于$u(\cdot)$及无转换控制$d_0(\cdot)$和无脉冲控制$\xi_0(\cdot)$的(6.11)系统的轨线，而算子M及N定义如下：

$$M^d[v](x)=\min_{\bar{d}\in\Lambda,\bar{d}\neq d}\{v^{\bar{d}}(x)+k(d,\bar{d})\},$$
$$\forall(x, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda.\qquad(6.29)$$

$$N[v^d](x)=\inf_{\xi\in K}\{v^d(x+\xi)+l(\xi)\},$$
$$\forall(x, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda.\qquad(6.30)$$

进一步，若(6.27)式在某点$x_0\in\boldsymbol{R}^n$成立严格不等式，则存在$t_0>0$，使得

$$v^d(x_0)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}\left\{\int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), u(\tau), d)e^{-\lambda\tau}d\tau\right.$$
$$\left.+v^d(y_{x_0}(t))e^{-\lambda t}\right\},\qquad(6.31)$$
$$\forall t\in[0, t_0].$$

上述定理的证明与以前几节中类似定理的证明相仿，故我们就不去重复它了。通常算子M和N分别称为转换和脉冲障碍算子。对于混合控制问题，这两个障碍算子同时出现了。

利用上述定理，我们可以证明下述的结论。

定理 6.4 (HJB 方程) 假如值函数 $v(\cdot)\in C^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^m)$，则它满足下述的 Hamlton-Jacobi-Bellman 方程：

$$\max\{\lambda v^d(x)-H^d(x,\ v_x^d(x)),\ v^d(x)-M^d[v](x),\ v^d(x)-N[v^d](x)\}=0 \tag{6.32}$$

$$(x,\ d)\in\mathbf{R}^n\times\Lambda.$$

其中，

$$H^d(x,\ p)=\inf_{u\in U}\{(p,\ f(x,\ u,\ d))+f^0(x,\ u,\ d)\},$$

$$\forall(x,\ p,\ d)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\Lambda. \tag{6.33}$$

就方程的形式上讲，(2.50)、(4.30)式均是(6.32)式的特例．同时，若去掉(6.32)式中第二项，且设 U 为单点集，则得到无限时区定常的最优脉冲控制问题所对应的 HJB 方程。

必须指出，当 U 为单点集时，问题变为所谓的最优转换与脉冲控制问题．对这样的问题，当已求得值函数后，可以严格地构造出一个最优控制 $(d^*(\cdot),\ \xi^*(\cdot))\in\mathscr{S}^d\times\hat{\mathscr{K}}$．但是，当 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$ 出现时，尚不清楚是否可以进行同样的构造。

现在，就来简单讨论一下有限时区上的混合控制问题．为此，令 $T>0$ 给定，而 U、Λ 与 K 和本节开头时一样．设 f: $[0,\ T]\times\mathbf{R}^n\times U\times\Lambda\to\mathbf{R}^n$, f^0: $[0,\ T]\times\mathbf{R}^n\times U\times\Lambda\to\mathbf{R}$, h: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, k: $[0,\ T]\times\Lambda\times\Lambda\to\mathbf{R}^+$, l: $[0,\ T]\times K\to\mathbf{R}^+$ 均为连续映照，它们满足下述条件：

(i) 存在常数 $L>0$ 以及连续函数 ω: $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，它关于其每个变元均单调上升，满足 $\omega(r,\ 0)=0$, $\forall r\geqslant 0$，使得：对任何的 $x,\ \hat{x}\in\mathbf{R}^n$, $t,\ \hat{t}\in[0,\ T]$, $(u,\ d)\in U\times\Lambda$,

$$\|f(t,\ x,\ u,\ d)-f(t,\ \hat{x},\ u,\ d)\|$$

$$\leqslant L\|x-\hat{x}\|+\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ |t-\hat{t}|),\tag{6.34}$$

$$\|f(t,\ x,\ u,\ d)\|\leqslant L(1+\|x\|),\tag{6.35}$$

$$|f^0(t,\ x,\ u,\ d)-f^0(\hat{t},\ \hat{x},\ u,\ d)|$$

$$\leqslant\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|+|t-\hat{t}|),\tag{6.36}$$

$$|h(x)-h(\hat{x})|\leqslant\omega(\|x\|\vee\|\hat{x}\|,\ \|x-\hat{x}\|).\tag{6.37}$$

$$|f^0(t,\ 0,\ u,\ d)|,\ |h(0)|\leqslant L,\tag{6.38}$$

$$f^0(t,\ x,\ u,\ d),\ h(x)\geqslant -L.\tag{6.39}$$

(ii) 对所有的 $d,\ \hat{d},\ \tilde{d}\in\Lambda$, $d\neq\hat{d}\neq\tilde{d}$, 以及$0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T$,

$$k(t,\ d,\ \tilde{d})<k(t,\ d,\ \hat{d})+k(t,\ \hat{d},\ \tilde{d}),\tag{6.40}$$

$$k(t,\ d,\ d)=0,\tag{6.41}$$

$$k(\hat{t},\ d,\ \tilde{d})\leqslant k(t,\ d,\ \tilde{d}).\tag{6.42}$$

(iii) 对所有的 $0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T$, $\xi,\ \hat{\xi}\in K$,

$$l(t,\ \xi+\hat{\xi})<l(t,\ \xi)+l(t,\ \hat{\xi}),\tag{6.43}$$

$$l(\hat{t},\ \xi)\leqslant l(t,\ \xi),\tag{6.44}$$

$$\inf_{(t,\xi)\in[0,T]\times K} l(t,\ \xi)=l_0>0,\tag{6.45}$$

$$\lim_{\|\xi\|\to\infty}\ \inf_{t\in[0,T]} l(t,\ \xi)=+\infty.\tag{6.46}$$

然后,定义控制集合。对任何 $t\in[0,\ T)$, $d\in\Lambda$,

$$\mathscr{U}[t,\ T]=\{u(\cdot):[t,\ T]\to U,\ u(\cdot)\text{可测}\},$$

$$\mathscr{S}^d[t,\ T]=\{d(\cdot)=\sum_{i\geqslant1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot):[t,\ T]\to\Lambda,$$

$$d_0=d,\ \theta_0=t,\ d_i\in\Lambda,\ \theta_i\in[t,\ T],\ \forall i\geqslant1;$$

$$\theta_i\uparrow T;d_i\neq d_{i+1},\ \sum_{i\geqslant1}k(\theta_i,\ d_{i-1},\ d_i)<\infty\},$$

$$\mathscr{K}[t,\ T]=\{\xi(\cdot)=\sum_{j\geqslant1}\xi_j\chi_{[\tau_j,T]}(\cdot):[t,\ T]\to K,$$

$$\tau_1\geqslant t,\ \tau_j\uparrow T,\ \xi_j\in K,\ \forall j\geqslant1;$$

$$\sum_{j\geqslant1}l(\tau_j,\ \xi_j)<\infty\}.$$

受控系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_{t,x}(s) = f(s, y_{t,x}(s), u(s), d(s)) + \dot{\xi}(s), \\ \qquad s \in [t, T], \\ y_{t,x}(t) = x. \end{cases} \tag{6.47}$$

上式可以理解为下述积分方程：

$$y_{t,x}(s) = x + \int_t^s f(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau), d(\tau))\mathrm{d}\tau + \xi(s),$$
$$s \in [t, T]. \tag{6.48}$$

容易知道，在我们的条件假设下，对任何给定的$(t, x, d) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \Lambda$，$(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathscr{U}[t, T] \times \mathscr{S}^d[t, T] \times \mathscr{K}[t, T]$，(6.48)式存在唯一的解$y_{t,x}(\cdot)$，满足

$$\begin{cases} \|y_{t,x}(s)\| \leqslant e^{L(s-t)}(1 + \|x\|) + \|\xi(s)\| \\ \qquad + L\int_t^s e^{L(s-\tau)}\|\xi(\tau)\|\mathrm{d}\tau, \\ \qquad s \in [t, T], \\ \|y_{t,x}(s) - y_{t,\hat{x}}(s)\| \leqslant e^{L(s-t)}\|x - \hat{x}\|, \\ \qquad s \in [t, T], x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n. \end{cases} \tag{6.49}$$

定义性能指标为

$$\begin{aligned} & J^d_{t,x}(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)) \\ &= \int_t^T f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), u(\tau), d(\tau))\mathrm{d}\tau + h(y_{t,x}(T)) \\ &\quad + \sum_{i \geqslant 1} k(\theta_i, d_{i-1}, d_i) + \sum_{j \geqslant 1} l(\tau_j, \xi_j). \end{aligned} \tag{6.50}$$

然后，我们可以叙述混合的最优控制问题.

问题 CSI′. 对任何给定的 $(t, x, d) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \Lambda$，寻找$(u^*(\cdot), d^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) \in \mathscr{U}[t, T] \times \mathscr{S}^d[t, T] \times \mathscr{K}[t, T]$，使得

$$\begin{aligned} & J^d_{t,x}(u^*(\cdot), d^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) \\ &= \inf_{\mathscr{U}[t,T] \times \mathscr{S}^d[t,T] \times \mathscr{K}[t,T]} J^d_{t,x}(u(\cdot), d(\cdot), \xi(\cdot)). \end{aligned} \tag{6.51}$$

自然地，定义该问题的值函数如下：

$$\begin{cases} v^d(t,x)=\inf\limits_{\mathscr{U}[t,T]\times\mathscr{I}^d[t,T]\times\mathscr{K}[t,T]} J^d_{t,x}(u(\cdot),d(\cdot),\xi(\cdot)), \\ v^d(T,x)=h(x), \\ v(\cdot,\cdot)=(v^1(\cdot,\cdot),v^2(\cdot,\cdot),\cdots,v^m(\cdot,\cdot)). \end{cases} \tag{6.52}$$

命题 6.5 存在连续函数 $\bar{c}$: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$ 和 $\bar{\omega}$: $\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$\bar{\omega}$ 关于它的每个变量均单调上升，$\bar{\omega}(r,0)=0$, $\forall r\geqslant 0$，使得对任何的 t, $\hat{t}\in[0,T]$, x, $\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $d\in\Lambda$，有

$$-(T+1)\leqslant v^d(t,x)\leqslant\bar{c}(\|x\|), \tag{6.53}$$

$$|v^d(t,x)-v^d(\hat{t},\hat{x})|\leqslant\bar{\omega}(\|x\|\vee\|\hat{x}\|, \\ |x-\hat{x}|+|t-\hat{t}|). \tag{6.54}$$

该命题的证明可以通过综合命题2.2、命题4.4和命题5.2的证明来获得。

定理 6.6 （**最优性原理**） 值函数 $v(\cdot,\cdot)$ 满足下述条件：

$$v^d(t,x)\leqslant\min\{M^d[v](t,x), N[v^d](t,x)\}, \\ (t,x,d)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\times\Lambda, \tag{6.55}$$

$$v^d(t,x)\leqslant\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]}\left\{\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),u(\tau),d)\mathrm{d}\tau \\ +v(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t}))\right\}, \tag{6.56}$$

$$\forall 0\leqslant t\leqslant\hat{t}\leqslant T,\ x\in\boldsymbol{R}^n,$$

此处，$y_{t,x}(\cdot)$是(6.48)式的对应于$u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$，及无转换控制 $d_0(\cdot)$和无脉冲控制 $\xi_0(\cdot)$的轨线，而算子M和N定义如下：

$$\begin{cases} M^d[v](t,x)=\min\limits_{\bar{d}\neq d,\bar{d}\in\Lambda}\{v^{\bar{d}}(t,x)+k(t,d,\bar{d})\}, \\ N[v^d](t,x)=\inf\limits_{\xi\in K}\{v^d(t,x+\xi)+l(t,\xi)\}. \end{cases} \tag{6.57}$$

进一步，若(6.55)式在某点 $(t_0, x_0)\in[0, T)\times\boldsymbol{R}^n$ 成立严格不等式，则存在 $\bar{t}\in(t_0, T]$，使得

$$v^d(t_0, x_0)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]}\left\{\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau, y_{t_0,x_0}(\tau), u(\tau), d(\tau))d\tau + v^d(\hat{t}, y_{t,x}(\hat{t}))\right\},\quad \forall\hat{t}\in[t_0, \bar{t}]. \tag{6.58}$$

利用此定理，最终可得下述的定理.

定理 6.7 (HJB 方程) 若值函数 $v(\cdot, \cdot)\in C^1([0, T]\times\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{R}^m)$，则它满足下述的 HJB 方程：

$$\begin{cases}\min\{v_t^d(t, x)+H^d(t, x, v_x(t, x)), M^d[v](t, x)-v^d(t, x),\\ N[v^d](t, x)-v^d(t, x)\}=0, \forall(t, x, d)\in[0, T]\times\boldsymbol{R}^n\times\Lambda,\\ v^d(T, x)=h(x), (x, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda.\end{cases} \tag{6.59}$$

利用前面几节的技巧，很容易证明上述两定理.

§7 具有转换策略的微分对策

本节将考察一类二人零和的微分对策。其中，每个博奕者均只能取转换策略。这是一类非经典的二人零和微分对策。读者将会看到，有些结果是有点出人意料的。在这一节中，主要叙述无限时区定常情形.

考虑这样的问题.

设 $A=\{1, 2, \cdots, m\}$，$B=\{1, 2, \cdots, n\}$，令 X 为一个有限维欧氏空间. 设 f：$X\times A\times B\to X$，f^0：$X\times A\times B\to\boldsymbol{R}$，$k$：$A\times A\to\boldsymbol{R}^+$，$l$：$B\times B\to\boldsymbol{R}^+$ 均为连续函数，它们满足下述条件：

(G1) 存在常数 $L>0$，$0<\delta\leqslant1$，使得对所有 $x, \hat{x}\in X$，

$(a, b) \in A \times B$,

$$\|f(x, a, b) - f(\hat{x}, a, b)\| \leqslant L\|x - \hat{x}\|, \tag{7.1}$$

$$\|f(x, a, b)\| \leqslant L, \tag{7.2}$$

$$|f^0(x, a, b) - f^0(\hat{x}, a, b)| \leqslant L\|x - \hat{x}\|^\delta, \tag{7.3}$$

$$|f^0(x, a, b)| \leqslant L. \tag{7.4}$$

(G2) 对所有的 $a, \hat{a}, \tilde{a} \in A$, $a \neq \hat{a} \neq \tilde{a}$,

$$k(a, \tilde{a}) < k(a, \hat{a}) + k(\hat{a}, \tilde{a}), \tag{7.5}$$

$$k(a, a) = 0. \tag{7.6}$$

(G3) 对所有的 $b, \hat{b}, \tilde{b} \in B$, $b \neq \hat{b} \neq \tilde{b}$,

$$l(b, \tilde{b}) < l(b, \hat{b}) + l(\hat{b}, \tilde{b}), \tag{7.7}$$

$$l(b, b) = 0. \tag{7.8}$$

注意到，上面关于 f 和 f^0 的假设比 §4 中的条件要强。这将使叙述上和有些证明变得较为简单。对于更一般的条件，也可讨论微分对策问题。

取 $\lambda > 0$, $a \in A$, $b \in B$, 定义

$$\mathscr{A}^a = \{a(\cdot) = \sum_{i\geqslant 1} a_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1}, \theta_i)}(\cdot): [0, \infty) \to A,\ a_0 = a,$$

$$\theta_0 = 0,\ \theta_i \in [0, \infty],\ \forall i \geqslant 1;\ \theta_i \uparrow +\infty,\ a_{i+1} \neq a_i;$$

$$\sum_{i\geqslant 1} k(a_{i-1}, a_i) e^{-\lambda\theta_i} < \infty\},$$

$$\mathscr{B}^b = \{b(\cdot) = \sum_{j\geqslant 1} b_{j-1}\chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(\cdot): [0, \infty) \to B,\ b_0 = b,$$

$$\tau_0 = 0,\ \tau_j \in [0, \infty],\ \forall i \geqslant 1;\ \tau_j \uparrow +\infty,\ b_{j+1} \neq b_j;$$

$$\sum_{j\geqslant 1} l(b_{j-1}, b_j) e^{-\lambda\tau_j} < \infty\}.$$

需注意，与§4中讨论最优转换控制问题时一样，我们作了 $a(\cdot) \equiv \sum_{i\geqslant 1} a_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1}, \theta_i)}(\cdot)$ 与 $\{a_i, \theta_i\}_{i\geqslant 0}$ 之间、$b(\cdot) \equiv \sum_{j\geqslant 1} b_{j-1}\chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(\cdot)$ 与 $\{b_j, \tau_j\}_{j\geqslant 0}$ 之间的等同。

对于任何的 $x \in X$, $(a, b) \in A \times B$, $a(\cdot) \in \mathscr{A}^a$, $b(\cdot) \in$

$\mathscr{B}^b$，考虑下述受控系统：

$$\begin{cases} \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), a(t), b(t)), t>0, \\ y_x(0) = x. \end{cases} \tag{7.9}$$

而对应的性能指标为

$$\begin{aligned} & J_x^{a,b}(a(\cdot), b(\cdot)) \\ & = \int_0^{\infty} f^0(y_x(t), a(t), b(t)) e^{-\lambda t} dt \\ & \quad + \sum_{i \geq 1} k(a_{i-1}, a_i) e^{-\lambda \theta_i} \\ & \quad - \sum_{j \geq 1} l(b_{j-1}, b_j) e^{-\lambda \tau_j}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

类似于 §3，在二人零和微分对策中，有两个博奕者，称之为 A 和 B，他们分别采用控制 $a(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$。博奕者 A 试图选取 $a(\cdot) \in \mathscr{A}^a$，使得泛函(7.10)式极小化，而博奕者 B 则试图选取 $b(\cdot) \in \mathscr{B}^b$，使得泛函(7.10)式极大化。容易见到，由于(7.10) 式中转换花费项的出现，该微分对策与 §3 中是不同的。通常称§3中的微分对策是经典的。因此，我们也称本节中的微分对策问题是非经典的。

类似于 §3，引进下述定义。

定义 7.1 对给定的 $a \in A$，一个博奕者 A 的以 a 为初值的容许策略 α^a 是一个映照 $\alpha^a: \bigcup_{b \in B} \mathscr{B}^b \to \mathscr{A}^a$，满足

$$b(t) = \hat{b}(t), \forall t \in [0, s], \tag{7.11}$$

导致

$$\alpha^a[b(\cdot)](t) = \alpha^a[\hat{b}(\cdot)](t), \forall t \in [0, s]. \tag{7.12}$$

同理，可定义博奕者 B 的以 b 为初值的容许策略 β^b。

记

$\Gamma^a = \{\alpha^a: \alpha^a$ 为博奕者 A 的以 a 为初值的容许策略$\}$，

$\Delta^b = \{\beta^b: \beta^b$ 为博奕者 B 的以 b 为初值的容许策略$\}$，

今对 $x\in X$, $(a,b)\in A\times B$, $\alpha^a\in\Gamma^a$, $b(\cdot)\in\mathscr{B}^b$, 我们知道 $\alpha^a[b(\cdot)]\in\mathscr{A}^a$。故存在唯一的 (7.9)的对应于 $(\alpha^a[b(\cdot)],b(\cdot))$ 的解 $y_x(\cdot)=y_x(\cdot;\alpha^a[b(\cdot)],b(\cdot))$。从而, $J_x^{a,b}(\alpha^a[b(\cdot)],b(\cdot))$有意义。定义

$$V^{a,b}(x)=\inf_{\alpha^a\in\Gamma^a}\sup_{b(\cdot)\in\mathscr{B}^b}J_x^{a,b}(\alpha^a[b(\cdot)],b(\cdot)),\quad \forall(x,a,b)\in X\times A\times B. \tag{7.13}$$

类似地,定义

$$U^{a,b}(x)=\sup_{\beta^b\in\Delta^b}\inf_{a(\cdot)\in\mathscr{A}^a}J_x^{a,b}(a(\cdot),\beta^b[a(\cdot)]),\quad \forall(x,a,b)\in X\times A\times B. \tag{7.14}$$

分别令

$$V(x)=\begin{pmatrix}V^{1,1}(x) & V^{1,2}(x) & \cdots & V^{1,n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ V^{m,1}(x) & V^{m,2}(x) & \cdots & V^{m,n}(x)\end{pmatrix},$$

$$U(x)=\begin{pmatrix}U^{1,1}(x) & U^{1,2}(x) & \cdots & U^{1,n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ U^{m,1}(x) & U^{m,2}(x) & \cdots & U^{m,n}(x)\end{pmatrix},$$

它们分别称为下值函数和上值函数。对于现在的问题,它的值函数是矩阵值的。

命题 7.2 对任何的$(a,b)\in A\times B$, $x,\hat{x}\in X$,

$$|V^{a,b}(x)|,\ |U^{a,b}(x)|\leqslant\frac{L}{\lambda}, \tag{7.15}$$

$$|V^{a,b}(x)-V^{a,b}(\hat{x})|,\ |U^{a,b}(x)-U^{a,b}(\hat{x})|\leqslant\frac{2L}{\lambda-\eta L}\|x-\hat{x}\|^{\eta}, \tag{7.16}$$

此处, $0<\eta<\min\{\delta,\lambda/L\}$。

证 仅对下值函数 $V(\cdot)$进行证明。

首先,定义 $\alpha_0\in\Gamma^a$ 如下:

$$\alpha_0[b(\cdot)](t)\equiv a,\quad \forall t\geqslant 0,\ \forall b(\cdot)\in\bigcup_{b\in B}\mathscr{B}^b. \tag{7.17}$$

即 $\alpha_0[b(\cdot)]$ 为无转换控制。则有

$$\begin{aligned}V^{a,b}(x)&\leqslant \sup_{b(\cdot)\in\mathscr{B}^b} J_x^{a,b}(\alpha_0[b(\cdot)],b(\cdot))\\&\leqslant \sup_{b(\cdot)\in\mathscr{B}^b}\int_0^\infty f^0(y_x(t),a,b(t))e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \qquad (7.18)\\&\leqslant\int_0^\infty Le^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{L}{\lambda}.\end{aligned}$$

另一方面，对任何的 $\alpha\in\Gamma^a$，若记 $b_0(\cdot)$ 为无转换控制，则有

$$\begin{aligned}&\sup_{b(\cdot)\in\mathscr{B}^b} J_x^{a,b}(\alpha[b(\cdot)],b(\cdot))\geqslant J_x^{a,b}(\alpha[b_0(\cdot)],b_0(\cdot))\\&\geqslant\int_0^\infty f^0(y_x(t),\alpha[b_0(\cdot)](t),b)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\\&\geqslant -L\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=-\frac{L}{\lambda}.\end{aligned}$$

因此，关于 $\alpha\in\Gamma^a$ 取下确界，可得

$$V^{a,b}(x)\geqslant-\frac{L}{\lambda}. \tag{7.19}$$

与(7.18)式综合，便得(7.15)式。现证明(7.16)式。类似于(2.48)式，有

$$|f^0(x,a,b)-f^0(\hat{x},a,b)|\leqslant 2L\|x-\hat{x}\|^\eta,$$
$$\forall x,\hat{x}\in X,\ (a,b)\in A\times B. \tag{7.20}$$

此处 $0<\eta<\min\{\delta,\lambda/L\}$。因此，对任何 $\alpha\in\Gamma^a$，$b(\cdot)\in\mathscr{B}^b$，有

$$\begin{aligned}&|J_x^{a,b}(\alpha[b(\cdot)],b(\cdot))-J_{\hat{x}}^{a,b}(\alpha[b(\cdot)],b(\cdot))|\\&\leqslant\int_0^\infty 2L\|y_x(t)-y_{\hat{x}}(t)\|^\eta e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\\&\leqslant 2L\int_0^\infty e^{L\eta t}|x-\hat{x}|^\eta e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\\&=\frac{2L}{\lambda-\eta L}|x-\hat{x}\|^\eta.\end{aligned}$$

因此，关于$b(\cdot)\in\mathscr{B}^b$取上确界，然后再关于$\alpha\in\Gamma^a$取下确界，便可得到(7.16)式。

定理7.3 （最优性原理） 下值函数$V(\cdot)$和上值函数$U(\cdot)$分别满足下述条件：对任何$(a, b, x)\in A\times B\times X$，$t>0$，

$$V^{a,b}(x)=\inf_{\alpha\in\Gamma^a}\sup_{b(\cdot)\in\mathscr{B}^b}\Big\{\int_0^t f^0(y_x(\tau),\alpha[b(\cdot)](\tau),b(\tau))e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau+\sum_{\theta_i<t}k(a_{i-1}, a_i)e^{-\lambda\theta_i}-\sum_{\tau_j<t}l(b_{j-1}, b_j)e^{-\lambda\tau_j}+V^{\alpha[b(\cdot)](t),b(t)}(y_x(t))e^{-\lambda t}\Big\}. \tag{7.21}$$

$$U^{a,b}(x)=\sup_{\beta\in\Delta^b}\inf_{a(\cdot)\in\mathscr{A}^a}\Big\{\int_0^t f^0(y_x(\tau), a(\tau),\beta[a(\cdot)](\tau))e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau+\sum_{\theta_i<t}k(a_{i-1}, a_i)e^{-\lambda\theta_i}-\sum_{\tau_j<t}l(b_{j-1}, b_j)e^{-\lambda\tau_j}+U^{a(t),\beta[a(\cdot)](t)}(y_x(t))e^{-\lambda t}\Big\}. \tag{7.22}$$

在(7.21)式中，$\alpha[b(\cdot)]=\{a_i, \theta_i\}_{i\geq 0}$，$b(\cdot)=\{b_j, \tau_j\}_{j\geq 0}$，而在(7.22)式中，$a(\cdot)=\{a_i, \theta_i\}_{i\geq 0}$，$\beta[a(\cdot)]=\{b_j, \tau_j\}_{j\geq 0}$。

上述定理的证明几乎与定理3.3的一样。因此，详细的证明过程略去了。

现在，定义下述的转换障碍算子：对任何的$(m\times n)$矩阵值函数$W: X\to\mathbf{R}^{m\times n}$，定义

$$\begin{cases} M^{a,b}[W](x)=\min\limits_{\bar a\neq a,\bar a\in A}\{W^{\bar a,b}(x)+k(a, \bar a)\}, \\ M_{a,b}[W](x)=\max\limits_{\bar b\neq b,\bar b\in B}\{W^{a,\bar b}(x)-l(b, \bar b)\}, \end{cases}\quad \forall x\in X. \tag{7.23}$$

利用前面的定理7.3，有：

定理7.4 下值函数$V(\cdot)$满足下面条件：

(i) 对所有的$(a, b, x)\in A\times B\times X$，

$$M_{a,b}[V](x)\leqslant V^{a,b}(x)\leqslant M_{a,b}[V](x), \qquad (7.24)$$

(ii) 假如在某点$(a, b, x)\in A\times B\times X$，

$$V^{a,b}(x)<M^{a,b}[V](x), \qquad (7.25)$$

则存在一个$t_0>0$，使得

$$V^{a,b}(x)\geqslant\int_0^t f^0(y_x(\tau), a, b)e^{-\lambda\tau}d\tau+V^{a,b}(y_x(t))e^{-\lambda t},$$

$$\forall t\in[0, t_0], \qquad (7.26)$$

(iii) 假如在某点$(a, b, x)\in A\times B\times X$，

$$V^{a,b}(x)>M_{a,b}(x), \qquad (7.27)$$

则存在一个$t_0>0$，使得

$$V^{a,b}(x)\leqslant\int_0^t f^0(y_x(\tau), a, b)e^{-\lambda\tau}d\tau+V^{a,b}(y_x(t))e^{-\lambda t},$$

$$\forall t\in[0, t_0]. \qquad (7.28)$$

证 (i) 对给定的$(a, b, x)\in A\times B\times X$，对任何$\bar{a}\in A\setminus\{a\}$，以及$\bar{\alpha}\in\Gamma^{\bar{a}}$，$b(\cdot)\in\mathscr{B}^b$，定义$\alpha\in\Gamma^a$如下：设

$$\bar{\alpha}[b(\cdot)](t)=\sum_{i\geqslant1}\bar{a}_{i-1}\chi_{[\bar{\theta}_{i-1},\bar{\theta}_i)}(\cdot),$$

则

$$\alpha[b(\cdot)](t)=\sum_{i\geqslant1}a_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot).$$

其中

$$\begin{cases}a_0=a,\ a_i=\bar{a}_{i-1},\ i\geqslant1,\\ \theta_0=0,\ \theta_i=\bar{\theta}_{i-1},\ i\geqslant1.\end{cases}$$

则有

$$J_x^{a,b}(\alpha[b(\cdot)], b(\cdot))=J_x^{\bar{a},b}(\bar{\alpha}[b(\cdot)], b(\cdot))+k(a, \bar{a}). \qquad (7.29)$$

于是，先关于$b(\cdot)\in\mathscr{B}^b$取上确界，再关于$\bar{\alpha}\in\Gamma^{\bar{a}}$取下确界，得到

$$V^{a,b}(x) \leqslant V^{\bar{a},b}(x) + k(a, \bar{a}), \ \forall \bar{a} \in A \backslash \{a\}, \qquad (7.30)$$

故知

$$V^{a,b}(x) \leqslant M^{a,b}[V](x). \qquad (7.31)$$

另一方面，对任何的 $\bar{b} \in B \backslash \{b\}$ 及任何的 $\bar{b}(\cdot) \in \mathscr{B}^{\bar{b}}$，定义 $b(\cdot) \in \mathscr{B}^b$ 如下：设

$$\bar{b}(\cdot) = \sum_{j \geqslant 1} \bar{b}_{j-1} \chi_{[\bar{\tau}_{j-1}, \bar{\tau}_j)}(\cdot),$$

则

$$b(\cdot) = \sum_{j \geqslant 1} b_{j-1} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(\cdot). \qquad (7.32)$$

其中

$$\begin{cases} b_0 = b, \ b_j = \bar{b}_{j-1}, \ j \geqslant 1, \\ \tau_0 = 0, \ \tau_j = \bar{\tau}_{j-1}, \ j \geqslant 1. \end{cases} \qquad (7.33)$$

则有：$\forall \alpha \in \Gamma^a$，

$$J_x^{a,b}(\alpha[b(\cdot)], b(\cdot)) = J_x^{a,\bar{b}}(\alpha[b(\cdot)], \bar{b}(\cdot)) - l(b, \bar{b}). \qquad (7.34)$$

然后，定义 $\bar{\alpha} \in \Gamma^a$ 如下：

$$\bar{\alpha}[\bar{b}(\cdot)] = \alpha[b(\cdot)],$$

此处，$\bar{b}(\cdot) \in \mathscr{B}^{\bar{b}}$，而 $b(\cdot)$ 是按 (7.32)～(7.33) 由 $\bar{b}(\cdot)$ 得到。则 α 在 $\mathscr{B}^{\bar{b}}$ 上有定义，再在 $(\bigcup_{\tilde{b} \in B} \mathscr{B}^{\tilde{b}}) \backslash \mathscr{B}^{\bar{b}}$ 上适当定义 $\bar{\alpha}$，便可使得 $\bar{\alpha} \in \Gamma^a$。从而(7.34)变为

$$J_x^{a,b}(\alpha[b(\cdot)], b(\cdot)) = J_x^{a,\bar{b}}(\bar{\alpha}[\bar{b}(\cdot)], \bar{b}(\cdot)) - l(b, \bar{b}). \qquad (7.35)$$

然后，关于 $\bar{b}(\cdot) \in \mathscr{B}^{\bar{b}}$ 取上确界，有

$$\sup_{b(\cdot) \in \mathscr{B}^b} J_x^{a,b}(\alpha[b(\cdot)], b(\cdot))$$

$$\geqslant \sup_{\bar{b}(\cdot) \in \mathscr{B}^{\bar{b}}} J_x^{a,\bar{b}}(\bar{\alpha}[\bar{b}(\cdot)], \bar{b}(\cdot)) - l(b, \bar{b}) \qquad (7.36)$$

$$\geqslant V^{a,\bar{b}}(x) - l(b, \bar{b}).$$

上式的第一个不等式是由于下面的事实：

$\mathscr{B}^b \supseteq \{b(\cdot) \in \mathscr{B}^b;\ b(\cdot)$ 由(7.32) - (7.33)式得到，其中 $\bar{b}(\cdot) \in \mathscr{B}^{\bar{b}}\}$.

因此，在(7.36)式中，关于 $\alpha \in \Gamma^a$ 再取下确界，得

$$V^{a,b}(x) \geqslant V^{a,\bar{b}}(x) - l(b, \bar{b}), \forall \bar{b} \in B \backslash \{b\}. \qquad (7.37)$$

所以，

$$V^{a,b}(x) \geqslant M_{a,b}[V](x). \qquad (7.38)$$

上式与(7.31)式综合，便得到(i)。

(ii) 对任何的 $t, \varepsilon > 0$，以及 $b(\cdot) \equiv b \in \mathscr{B}^b$ 由定理7.3知存在 $\alpha_\varepsilon^t \in \Gamma^a$，使得

$$\begin{aligned} V^{a,b}(x) + \varepsilon \geqslant & \int_0^t f^0(y_x(\tau), \alpha_\varepsilon^t[b](\tau), b) e^{-\lambda\tau} d\tau \\ & + \sum_{\theta_i^{\varepsilon,t} < t} k(a_{i-1}^{\varepsilon,t}, a_i^{\varepsilon,t}) e^{-\lambda\theta_i^{\varepsilon,t}} \\ & + V^{\alpha_\varepsilon^t[b](t),b}(y_x(t)) e^{-\lambda t}, \end{aligned} \qquad (7.39)$$

此处，

$$\alpha_\varepsilon^t[b](\cdot) = \sum_{i \geqslant 1} a_{i-1}^{\varepsilon,t} \chi_{[\theta_{i-1}^{\varepsilon,t}, \theta_i^{\varepsilon,t})}(\cdot),$$

当 $\varepsilon, t > 0$ 足够小时，必有

$$\theta_1^{\varepsilon,t} > t. \qquad (7.40)$$

事实上，若存在一个序列 $(\varepsilon, t) \to (0, 0)$，使得

$$\theta_1^{\varepsilon,t} \leqslant t, \qquad (7.41)$$

则对此序列，利用(7.39)式，注意到 $V(\cdot)$ 的连续性，可得

$$V^{a,b}(x) \geqslant M^{a,b}[V](x),$$

这与(7.25)式矛盾。故(7.40)式成立。这样，(7.39)式变为

$$\begin{aligned} V^{a,b}(x) + \varepsilon \geqslant & \int_0^t f^0(y_x(\tau), a, b) e^{-\lambda\tau} d\tau \\ & + V^{a,b}(y_x(t)) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \qquad (7.42)$$

(7.40) 式意味着在 $[0, t]$ 上，$\alpha_\varepsilon^t[b](\cdot)$ 没有转换。上面的(7.42)式对任何足够小的 t, $\varepsilon>0$ 成立。现在，固定足够小的 $t>0$，然后令 $\varepsilon\to 0$，便得到

$$V^{a,b}(x)\geqslant\int_0^t f^0(y_x(\tau), a, b)e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau + V^{a,b}(y_x(t))e^{-\lambda t}. \qquad (7.43)$$

上式对任何足够小的 $t>0$ 成立。故得证(7.26)式。

(iii) 取 $\alpha_0\in\Gamma^a$，它的定义如下：

$$\alpha_0[b(\cdot)](t)=a, \ t\in[0, \infty). \qquad (7.44)$$

则由(7.21)式知，

$$V^{a,b}(x)\leqslant\sup_{b(\cdot)\in\mathscr{B}^b}\left\{\int_0^t f^0(y_x(\tau), a, b(\cdot))e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau - \sum_{\tau_j<t} l(b_{j-1}, b_j)e^{-\lambda\tau_j} + V^{a,b(t)}(y_x(t))e^{-\lambda t}\right\}, \qquad (7.45)$$

于是，对任何的 ε, $t>0$，存在 $b_\varepsilon^t(\cdot)\in\mathscr{B}^b$，使得

$$V^{a,b}(x)-\varepsilon\leqslant\int_0^t f^0(y_x(\tau), a, b_\varepsilon^t(\tau))e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau - \sum_{\tau_j^{\varepsilon,t}<t} l(b_{j-1}^{\varepsilon,t}, b_j^{\varepsilon,t})e^{-\lambda\tau_j^{\varepsilon,t}} + V^{a,b_\varepsilon^t(t)}(y_x(t))e^{-\lambda t}. \qquad (7.46)$$

此处

$$b_\varepsilon^t(\cdot)=\sum_{j\geqslant 1} b_{j-1}^{\varepsilon,t}\chi_{[\tau_{j-1}^{\varepsilon,t}, \tau_j^{\varepsilon,t})}(\cdot)$$

类似于(7.40)式，可证明当 ε, $t>0$ 足够小时，

$$\tau_1^{\varepsilon,t}>t, \qquad (7.47)$$

然后，类似于(ii)的证明，即可完成(iii)的证明。

§4 中的定理 4.2 与上述的定理 7.4 有类似之处。比较这两个定理，可以看出控制问题与二人零和微分对策问题在控制函数仅取分段函数并具有转换花费时的不同之处。利用

定理7.4，可以导出下面的定理：

定理7.5 (Isaacs方程) 设下值函数$V(\cdot)\in C^1$，则它满足下述的Isaacs方程：

$$
\begin{cases}
\min\{\max\{\lambda V^{a,b}(x)-H^{a,b}(x,V_x^{a,b}(x)),\\
\qquad V^{a,b}(x)-M^{a,b}[V](x)\},\\
\qquad V^{a,b}(x)-M_{a,b}[V](x)\}=0,\\
\qquad\qquad (a,b,x)\in A\times B\times X,\\
\max\{\min\{\lambda V^{a,b}(x)-H^{a,b}(x,V_x^{a,b}(x)),\\
\qquad V^{a,b}(x)-M_{a,b}[V](x)\},\\
\qquad V^{a,b}(x)-M^{a,b}[V](x)\}=0,\\
\qquad\qquad (a,b,x)\in A\times B\times X,
\end{cases}
\tag{7.48}
$$

此处

$$
H^{a,b}(x,p)=f^0(x,a,b)+(p,f(x,a,b)),\quad \forall(a,b,x,p)\in A\times B\times X\times X. \tag{7.49}
$$

注意到，由定理7.4，当下值函数$V(\cdot)$是连续可微时，下面结论成立：

$$
M_{a,b}[V](x)\leqslant V^{a,b}(x)\leqslant M^{a,b}[V](x),\quad \forall(a,b,x)\in A\times B\times X, \tag{7.50}
$$

在集合$\{(a,b,x)\in A\times B\times X;V^{a,b}(x)<M^{a,b}[V](x)\}$上，

$$
\lambda V^{a,b}(x)-H^{a,b}(x,V_x^{a,b}(x))\geqslant 0, \tag{7.51}
$$

而在集合$\{(a,b,x)\in A\times B\times X;V^{a,b}(x)>M_{a,b}[V](x)\}$上，

$$
\lambda V^{a,b}(x)-H^{a,b}(x,V_x^{a,b}(x))\leqslant 0. \tag{7.52}
$$

将上面情况用min和max运算写出来，便知(7.48)与(7.49)～(7.52)等价。

对于上值函数$U(\cdot)$，也有完全类似于定理7.4和7.5的结论。值得注意的是，上值函数$U(\cdot)$和下值函数$V(\cdot)$满足完全相同的Isaacs方程。因此，我们有下面的结果。

定理 7.6 设上、下值函数 $U(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 均为 C^1 的。又设方程(7.48)的解是唯一的。则

$$U(\cdot)=V(\cdot), \tag{7.53}$$

即二人零和微分对策存在值函数。

由于上、下值函数 $U(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 均未必是 C^1 的。因此，上述的结果是形式的。以后，将用粘性解的理论来严格化上面的过程。

对于有限时区非定常情形，也有相应的结果。另外，也可以讨论具有混合策略的微分对策，即在微分对策中，博奕双方可取连续实施转换和脉冲控制。限于篇幅，在此就不一一叙述了。

第三章 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程的粘性解理论

本章将介绍由 M. G. Crandall 和 P. L. Lions 引进的一阶 HJB 方程的粘性解理论。

§1 粘性解的引入

先看一些例子。

例 1.1 设受控系统为

$$\dot{y}=u(t),\quad t\in[0,1], \tag{1.1}$$

此处，状态空间为 $\mathbf{R}^1$，而控制约束为 $U=[-1,1]$。所以，上式中

$$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,1]\equiv\{u(\cdot);[0,1]\to[-1,1],\ u(\cdot)\text{可测}\}.$$

性能指标为

$$J(u(\cdot))=-y(1)^2. \tag{1.2}$$

现在，引入该问题的值函数。为此，任取 $(t,x)\in[0,1)\times\mathbf{R}$，考虑下述系统：

$$\begin{cases}\dot{y}_{t,x}(s)=u(s), & s\in[t,1],\\ y_{t,x}(t)=x.\end{cases} \tag{1.3}$$

和性能指标

$$J_{t,x}(u(\cdot))=-y_{t,x}(1)^2, \tag{1.4}$$

则值函数为

$$v(t, x) = \inf_{\mathscr{U}[t,1]} J_{t,x}(u(\cdot)). \tag{1.5}$$

现在，计算 $v(t, x)$。由(1.3)式知

$$y_{t,x}(s) = x + \int_t^s u(\tau)\mathrm{d}\tau, \ s \in [t, 1]. \tag{1.6}$$

因此，可知

$$v(t, x) = \begin{cases} -[x + (1-t)]^2, \ x \geqslant 0, \\ -[x - (1-t)]^2, \ x \leqslant 0, \end{cases} \quad t \in [0, 1]. \tag{1.7}$$

上式也可化为

$$\begin{aligned} v(t, x) &= -[|x| + (1-t)]^2 \\ &= -x^2 - (1-t)^2 - 2(1-t)|x|. \end{aligned} \tag{1.8}$$

可见，$v(\cdot, \cdot) \in C([0, 1] \times \boldsymbol{R})$，但是，

$$v(\cdot, \cdot) \notin C^1([0, 1] \times \boldsymbol{R}).$$

该问题的 HJB 方程为

$$\begin{cases} v_t + \inf\limits_{|u| \leq 1} v_x \cdot u = 0, \\ v(1, x) = -x^2. \end{cases} \tag{1.9}$$

即

$$\begin{cases} v_t(t, x) - |v_x(t, x)| = 0, \ (t, x) \in [0, 1) \times \boldsymbol{R}, \\ v(1, x) = -x^2. \end{cases} \tag{1.10}$$

容易验证，值函数 $v(\cdot, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times (\boldsymbol{R} \backslash \{0\})$ 上满足方程。将会看到，(1.10) 不存在 $C^1([0, 1] \times \boldsymbol{R})$ 的解（即古典解）。

例 1.2 考察下列受控系统：$t \in [0, 1)$，$y_{t,x}(\cdot)$ 取值于 $\boldsymbol{R}$，

$$\begin{cases} \dot{y}_{t,x}(s) = u(s) y_{t,x}(s), \quad s \in [t, 1], \\ y_{t,x}(t) = x. \end{cases} \tag{1.11}$$

容许控制集为

$$\mathscr{U}[t, 1] = \{u(\cdot): [t, 1] \to [0, 1], \ u(\cdot) \text{可测}\},$$

而性能指标为

$$J_{t,x}(u(\cdot)) = -y_{t,x}(1). \tag{1.12}$$

则易知(利用分离变量法)

$$y_{t,x}(s) = xe^{\int_t^s u(\tau)d\tau}, \quad s\in[t, 1]. \tag{1.13}$$

因此,值函数为

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \inf_{\mathscr{U}[t,1]}\left\{-xe^{\int_t^1 u(\tau)d\tau}\right\} \\ &= \begin{cases} -xe^{1-t}, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0, \end{cases} \\ &= -xe^{(1-t)H(x)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

此处,$H(x)=\chi_{[0,\infty)}(x)$。易知,$v(\cdot, \cdot)\in C([0, 1]\times \boldsymbol{R})$,但是 $v(\cdot, \cdot)\notin C^1([0, 1]\times \boldsymbol{R})$。该问题的 HJB 方程为

$$\begin{cases} v_t(t, x) + \inf\limits_{0\leqslant u\leqslant 1}\{v_x(t, x)\cdot ux\} = 0, \\ v(1, x) = -x. \end{cases} \tag{1.15}$$

注意到

$$\inf_{0\leqslant u\leqslant 1}\{v_x(t, x)ux\} = \min\{xv_x(t, x), 0\} = -[xv_x(t, x)]^-,$$

故(1.15)式可写成

$$\begin{cases} v_t(t, x) - [xv_x(t, x)]^- = 0, & (t, x)\in[0, 1)\times \boldsymbol{R}, \\ v(1, x) = -x, & x\in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{1.16}$$

由(1.14)式知,值函数 $v(\cdot, \cdot)$ 满足

$$v_t(t, x) = \begin{cases} xe^{1-t}, & x>0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

$$v_x(t, x) = \begin{cases} -e^{1-t}, & x>0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

因此,在 $[0, 1]\times(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$ 上,值函数 $v(t, x)$ 满足(1.16)

中的方程。将会看到(1.16)式不存在古典解。

上面两个例子表明，一般而言，值函数未必是 C^1 的。因此，一般地，值函数不可能在古典意义下满足相应的 HJB 方程。不过，上述两个例子中，值函数均是几乎处处满足相应的 HJB 方程。因此，在研究下述问题时，

$$\begin{cases} v_t + H(t, x, v_x) = 0, \ (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n, \\ v(T, x) = h(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}^n, \end{cases} \tag{1.17}$$

首先想到的是引入在几乎处处的意义下满足方程的广义解。我们暂且将其叙述为下面的定义。

定义 1.3 连续函数 $v(\cdot, \cdot)$ 称为(1.17)的一个广义解，如果 $v(\cdot, \cdot)$ 关于 (t, x) 几乎处处可导，且几乎处处满足(1.17)中的方程及终值条件。

易见，例 1.1 和 1.2 中的值函数分别是相应的 HJB 方程的广义解。但是，一般情况下，值函数是否几乎处处可导并不清楚。另外，若要用 HJB 方程的广义解来刻划值函数，还需要广义解的唯一性。然而，这种唯一性常常是没有的。下面的例子就说明了这一点。

例 1.4 考虑受控系统

$$\begin{cases} \dot{y}_{t,x}(s) = 2u(s), \ s \in [t, T], \\ y_{t,x}(t) = x, \end{cases} \tag{1.18}$$

其中，$u(\cdot) \in \mathscr{U}[t, T] \equiv L^\infty(t, T; \boldsymbol{R})$，而性能指标为

$$J_{t,x}(u(\cdot)) = \int_t^T u(\tau)^2 \mathrm{d}\tau. \tag{1.19}$$

于是，对应的 HJB 方程为

$$\begin{cases} v_t(t, x) + \inf\limits_{u \in \boldsymbol{R}} \{2v_x(t, x)u + u^2\} = 0, \ (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}, \\ v(T, x) = 0, \qquad x \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{1.20}$$

上式等价于

$$
\begin{cases} v_t(t,x)-|v_x(t,x)|^2=0, & (t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}, \\ v(T,x)=0, & x\in\boldsymbol{R}. \end{cases}
$$

(1.21)

由(1.18)～(1.19)知，最优控制为$u(s)\equiv 0$. 从而，值函数为

$$
v(t,x)\equiv 0,\quad (t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}. \tag{1.22}
$$

显然,该值函数是(1.21)的一个古典解. 但是，另一方面,若定义

$$
\tilde{v}(t,x)=\begin{cases} 0, & |x|\geqslant T-t, \\ |x|+t-T, & |x|<T-t. \end{cases} \tag{1.23}
$$

则显然$\tilde{v}(\cdot,\cdot)\in C([0,T]\times\boldsymbol{R})$，且它是一致 Lipschitz 连续的. 易知

$$
|\tilde{v}_x(t,x)|=\begin{cases} 0, & |x|>T-t, \\ 1, & |x|<T-t. \end{cases}
$$

$$
\tilde{v}_t(t,x)=\begin{cases} 0, & |x|>T-t, \\ 1, & |x|<T-t. \end{cases}
$$

因此，$\tilde{v}(\cdot,\cdot)$ 是(1.21)的另一个广义解. 从而,(1.21) 的广义解是不唯一的.

例 1.5 设受控系统为

$$
\begin{cases} \dot{y}_{t,x}(s)=u(s), & s\in[t,T], \\ y_{t,x}(t)=x. \end{cases} \tag{1.24}
$$

其中 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]\equiv L^\infty(t,T;\boldsymbol{R})$. 性能指标为

$$
J_{t,x}(u(\cdot))=\frac{1}{2}\int_t^T u(\tau)^2\mathrm{d}\tau+h(y_{t,x}(T)). \tag{1.25}
$$

此处，$h(\cdot)$ 为某个光滑函数. 则相应的 HJB 方程为:

$$
\begin{cases} v_t(t, x) + \inf\limits_{u \in R} \left\{ \dfrac{1}{2} u^2 + v_x(t, x) u \right\} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}, \\ v(T, x) = h(x), \quad x \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{1.26}
$$

上式也即

$$
\begin{cases} v_t(t, x) - \dfrac{1}{2} |v_x(t, x)|^2 = 0, \\ \qquad\qquad (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}, \\ v(T, x) = h(x), \quad x \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{1.27}
$$

我们要说明对某些 T 和 $h(\cdot)$ (即便 $h(\cdot)$ 足够光滑), 问题(1.27)不存在光滑解.

事实上, 设 $v(\cdot, \cdot)$ 为(1.27)式的一个光滑解, 且 v_{xx} 是有界的. 则令

$$
w = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \tilde{w} = \frac{\partial v}{\partial x}.
$$

于是, 在(1.27)中, 关于 x 求两次偏导可得

$$
\begin{cases} w_t - \tilde{w} w_x - w^2 = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}, \\ w(T, x) = h''(x), \quad x \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{1.28}
$$

今设 $z(\cdot)$ 满足

$$
\begin{cases} \dot{z}(t) = -\tilde{w}(t, z(t)) \equiv -v_x(t, z(t)), \quad t \in [0, T], \\ z(T) = x. \end{cases} \tag{1.29}
$$

然后令

$$
\theta(t) = w(t, z(t)), \quad t \in [0, T]. \tag{1.30}
$$

由于假设 $v_{xx}(t, x)$ 是有界的, 因此, (1.29) 的解 $z(\cdot)$ 在整个 $[0, T]$ 上有定义, 从而, $\theta(\cdot)$ 是在 $[0, T]$ 上有意义的. 于是, 由(1.28)得

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}(t) &= w_t(t, z(t)) + w_x(t, z(t))\dot{z}(t) \\
&= w_t(t, z(t)) - w_x(t, z(t))\widetilde{w}(t, z(t)) \\
&= w(t, z(t))^2 = \theta(t)^2.
\end{aligned}
$$

即函数 $\theta(\cdot)$ 满足

$$
\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \theta(t)^2, \quad t \in [0, T], \\ \theta(T) = h''(x). \end{cases} \tag{1.31}
$$

而利用分离变量法，可以解出(1.31)，其解为

$$
\theta(t) = \frac{\theta(T)}{1 - \theta(T)(T-t)} = \frac{h''(x)}{1 - h''(x)(T-t)}, \quad t \in [0, T]. \tag{1.32}
$$

因此，若存在 $x_0 \in \boldsymbol{R}$ 使得

$$
1 < h''(x_0)T \tag{1.33}
$$

时，(1.32)式不能对所有 $t \in [0, T]$ 有意义（对这个 x_0）。也就是说，$v(\cdot, \cdot)$ 不可能是 C^3 的，且 $v_{xx}(t, x)$ 有界。

综上所述，值函数一般不是 C^1 的；一般的 HJB 方程未必有光滑解；按定义 1.3 的广义解未必唯一。因此，为了用 HJB 方程来刻划值函数，必须更新概念，另避途径。下面，引进一阶偏微分方程的粘性解概念。

一般地，考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 中开集 Q 上的一阶偏微分方程。

$$
F(z, v(z), v_z(z)) = 0, \quad z \in Q. \tag{1.34}
$$

此处，$F: Q \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 为一个连续函数。适当给定 $v(\cdot)$ 在 Q 的部分边界或全部边界上的边界值。容易知道，方程(1.34)包含了第二章中方程(2.26)、(2.50)和(3.52)。

下面，我们启发性地给出粘性解的定义。为此，设 $v(\cdot) \in C^1(Q)$ 满足(1.34)。再设 $\varphi(\cdot) \in C_0^1(Q)$，$k \in \boldsymbol{R}$。假如 $\varphi(v-k)$ 在 $z_0 \in Q$ 处达到局部极值，则函数 $\varphi(v-k)$ 在 z_0 点的梯度为 0，即有（暂设 $\varphi(z_0) > 0$）。

$$v_z(z_0) = -\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0) - k), \tag{1.35}$$

从而，由(1.34)式知

$$F(z_0, v(z_0), -\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0) - k)) = 0. \tag{1.36}$$

我们看到，(1.36) 式中 $v_z(z_0)$ 被替代了。上面的思想启发我们去定义一个连续函数(未必可导)满足方程(1.34)的意义。事实上，对于 $v(\cdot) \in C(Q)$，$k \in \mathbf{R}$，$\varphi(\cdot) \in \mathscr{D}^+(Q) \equiv \{\varphi(\cdot) \in C_0^\infty(Q); \varphi(z) > 0, \forall z \in Q\}$，假如 $\varphi(v-k)$ 在 $z_0 \in Q$ 取到局部正的极大值，再设 $v^\varepsilon(\cdot)$ 为下述方程的一个 C^1 解，

$$-\varepsilon\Delta v + F(z, v, v_z) = 0, \quad z \in Q, \tag{1.37}$$

此处，Δ 为 Laplace 算子。设 $v^\varepsilon \to v$ $(\varepsilon \downarrow 0)$，关于 z 在 Q 中任何紧集上一致，而 $\varphi(v^\varepsilon - k)$ 在 $z_\varepsilon \in Q$ 处取到局部极大，且 $z_\varepsilon \to z_0$。由于

$$\begin{aligned}-\varepsilon\Delta(\varphi(v^\varepsilon - k)) = &-\varepsilon(\Delta\varphi)(v^\varepsilon - k)\\ &-\varphi F(z, v^\varepsilon, v_z^\varepsilon) - 2\varepsilon\langle\varphi_z, v_z^\varepsilon\rangle.\end{aligned}$$

因而，(注意类似于(1.35)的式子)

$$\begin{aligned}&F\left(z_\varepsilon, v^\varepsilon(z_\varepsilon), -\frac{\varphi_z(z_\varepsilon)}{\varphi(z_\varepsilon)}(v^\varepsilon(z_\varepsilon) - k)\right)\\
&= -\varepsilon\frac{\Delta\varphi(z_\varepsilon)}{\varphi(z_\varepsilon)}[v^\varepsilon(z_\varepsilon) - k] + \varepsilon\frac{\Delta[\varphi(v^\varepsilon - k)](z_\varepsilon)}{\varphi(z_\varepsilon)}\\
&\quad + 2\varepsilon\frac{|\varphi_z(z_\varepsilon)|^2}{\varphi(z_\varepsilon)^2}(v^\varepsilon(z_\varepsilon) - k)\\
&\leqslant -\varepsilon\frac{\Delta\varphi(z_\varepsilon)}{\varphi(z_\varepsilon)}(v^\varepsilon(z_\varepsilon) - k) + 2\varepsilon\frac{|\varphi_z(z_\varepsilon)|^2}{\varphi(z_\varepsilon)^2}(v^\varepsilon(z_\varepsilon) - k).\end{aligned}$$

由于 $v^\varepsilon \to v$ 关于 z 在 Q 中的紧集上一致，而 F 又是连续的，故，令 $\varepsilon \to 0$，得到

$$F(z_0, v(z_0), -\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0) - k)) \leqslant 0. \tag{1.38}$$

类似地，对 $\varphi(\cdot)\in\mathscr{D}^+(Q)$，$k\in\boldsymbol{R}$，若 $\varphi(v-k)$ 在 $z_0\in Q$ 处达到局部负极小值，则有

$$F(z_0, v(z_0), -\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0)-k))\geqslant 0. \qquad (1.39)$$

于是，引入下述的定义。

定义 1.6 连续函数 $v(\cdot)\in C(Q)$ 称作是方程 (1.34) 的一个粘性下(上)解，如果对任何 $\varphi(\cdot)\in\mathscr{D}^+(Q)$，$k\in\boldsymbol{R}$，使得函数 $\varphi(v-k)$ 在 $z_0\in Q$ 取到局部正的极大值（负的极小值），必有

$$F(z_0, v(z_0), -\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0)-k))\leqslant 0, \ (\geqslant 0). \qquad (1.40)$$

如果它同时是 (1.34) 的粘性下解和粘性上解，则称 $v(\cdot)$ 为 (1.34) 的一个粘性解。

在引出上面定义之前，我们形式地讨论了方程(1.34)加上项 $-\varepsilon\Delta v$ 后的情形。假定对应的解 v^ε 存在，并在紧集上一致收敛于 v，然后导出(1.38)和 (1.39) 式。以后将对一些特殊的 F，证明上述整个过程是严格的。一般情形的证明需要较多的篇幅，故将略去。在流体力学中，$-\varepsilon\Delta v$ 项表示粘性。因此，上述过程被称为"粘性消去法"，而得到的极限 $v(\cdot)$ 称为粘性解。这也就是最初"粘性解"这个名称的由来。

值得注意的是，当 $v(\cdot)\in C(Q)$ 为 (1.34) 的一个粘性解时，一般而言，它未必是

$$-F(z, v(z), v_z(z))=0, \quad z\in Q \qquad (1.41)$$

的一个粘性解。这是由于粘性解的定义中涉及不等式的缘故。下面是一个简单的反例。

例 1.7 考虑方程

$$1-|v_z(z)|=0, \quad z\in\boldsymbol{R}. \qquad (1.42)$$

则可以证明 $v(z)=|z|$ 是(1.42)的一个粘性解，但该函数不是方程

$$|v_z(z)|-1=0,\quad z\in \boldsymbol{R}. \tag{1.43}$$

的粘性解。这将留给读者去证明。

在以后一些情形中，上述粘性解的定义用起来不太方便，因此，我们将引进一些等价的定义。为此，首先引进一些记号。对于 $v(\cdot)\in C(Q)$ 以及 $z_0\in Q$，定义 $v(\cdot)$ 在 z_0 点的上、下导数分别为

$$D^+v(z_0)=\left\{p\in \boldsymbol{R}^n;\ \varlimsup_{z\to z_0}\frac{v(z)-v(z_0)-(p,z-z_0)}{|z-z_0|}\leqslant 0\right\}, \tag{1.44}$$

$$D^-v(z_0)=\left\{p\in \boldsymbol{R}^n;\ \varliminf_{z\to z_0}\frac{v(z)-v(z_0)-(p,z-z_0)}{|z-z_0|}\geqslant 0\right\}. \tag{1.45}$$

容易知道 $v(\cdot)$ 在 z_0 处可导，当且仅当

$$D^+v(z_0)\cap D^-v(z_0)\neq \emptyset. \tag{1.46}$$

此时，必有

$$D^+v(z_0)\cap D^-v(z_0)=\{v_z(z_0)\}. \tag{1.47}$$

另外，注意 $D^+v(z_0)$ 和 $D^-v(z_0)$ 完全可以是空集。例如，对于函数 $v(z)=|z|$, $z\in \boldsymbol{R}$,

$$\begin{cases} D^+v(0)=\emptyset, \\ D^-v(0)=[-1,1]. \end{cases} \tag{1.48}$$

进一步，若令

$$v(z)=\begin{cases} z\sin\dfrac{1}{z}, & z\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}, \\ 0, & z=0. \end{cases} \tag{1.49}$$

则可证明

$$D^+v(0)=D^-v(0)=\emptyset. \tag{1.50}$$

因此，一般的连续函数 $v(\cdot)$ 在给定点的上、下导数可以是空集。另一方面，由定义式立即可知，当它们非空时，它们必是凸闭集。

下面，给出粘性解的一些等价定义。

定理 1.8 下述命题等价：

1° $v(\cdot)\in C(Q)$ 是(1.34)的一个粘性下解(粘性上解)；

2° 对任何 $z\in Q$, $p\in D^{+}v(z)$, $(p\in D^{-}v(z))$,

$$F(z,\ v(z),\ p)\leqslant 0\quad(\geqslant 0). \tag{1.51}$$

3° 对任何 $\varphi(\cdot)\in C^{1}(Q)$，只要 $v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 $z\in Q$ 达到局部极大(极小)，则有

$$F(z,\ v(z),\ \varphi_{z}(z))\leqslant 0(\geqslant 0). \tag{1.52}$$

为证明此定理，需要引进下述引理。

引理 1.9 设 $w(\cdot)\in C(Q)$，$p\in D^{+}w(z_0)$，则存在 $\Psi\in C_0^1(Q)$，使得对某个 $\delta>0$，

$$\begin{cases}\Psi(z_0)=w(z_0),\\ \Psi_z(z_0)=p,\\ \Psi(z)>w(z),\ \forall z\neq z_0,\ |z-z_0|<\delta.\end{cases} \tag{1.53}$$

证 不妨设 $z_0=0$, $p=0$, $w(z_0)=0$。否则，考虑下述函数

$$\tilde{w}(z)=w(z+z_0)-w(z_0)-(p,\ z).$$

由 $0\in D^{+}w(0)$ 的定义知

$$\overline{\lim_{z\to 0}}\ \frac{w(z)}{|z|}\leqslant 0, \tag{1.54}$$

因此，存在 $r_0>0$，使得 $|z|\leqslant r_0$ 时成立着

$$w(z)\leqslant |z|\varepsilon(|z|),\quad \varepsilon(r)\to 0,\ (r\to 0\text{ 时}). \tag{1.55}$$

令

$$\bar{\varepsilon}(r)=\sup\{\varepsilon(s):0\leqslant s\leqslant r\},\quad r\leqslant r_0, \tag{1.56}$$

$$\Psi(z)=\int_{|z|}^{2|z|}\bar{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s+|z|^2,\quad |z|\leqslant r_0. \tag{1.57}$$

则易知，Ψ 在 $z=0$ 附近是 C^1 的，且

$$\begin{cases}\Psi(0)=0,\\ \Psi_z(0)=0.\end{cases} \tag{1.58}$$

同时还有

$$w(z)\leqslant|z|\varepsilon(|z|)<\Psi(z),\quad \forall|z|\neq 0,\ |z|\leqslant r_0. \tag{1.59}$$

然后，令

$$\begin{cases}x\in\mathscr{D}^+(Q),\\ x(z)=1,\quad \forall|z|\leqslant r_0,\end{cases}$$

则 $\Psi\cdot x$ 即为所要的函数。

定理 1.8 的证明 $1°\Rightarrow 2°$ 设 $v(\cdot)\in C(Q)$ 为(1.34)的一个粘性下解，则对任何 $z_0\in Q$，设 $p\in D^+v(z_0)$。取 $k<v(z_0)$。由引理 1.9，存在 $\Psi(\cdot)\in C_0^1(Q)^+$，使得

$$\begin{cases}\Psi(z_0)=v(z_0)-k,\\ \Psi_z(z_0)=p,\\ \Psi(z)>v(z)-k,\quad \forall|z-z_0|\text{ 足够小},\ z\neq z_0.\end{cases} \tag{1.60}$$

置

$$\varphi=\chi\cdot\frac{1}{\Psi}, \tag{1.61}$$

此处，$\chi\in\mathscr{D}^+(Q)$，$0\leqslant\chi(z)\leqslant 1$，$\chi(z_0)=1$，且

$$\chi(z)=0,\ \forall z\notin\{z\in Q:\Psi(z)>\max\{0,\ v(z)-k\}\}.$$

则有：$\forall z\in Q$，$z\neq z_0$，

$$\varphi(z)(v(z)-k)=\chi(z)\frac{v(z)-k}{\Psi(z)}<1=\varphi(z_0)(v(z_0)-k). \tag{1.62}$$

从而由粘性下解的定义，可得

$$F\left(z_0,\ v(z_0),\ -\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0)-k)\right)\leqslant 0, \qquad (1.63)$$

而由 $\varphi(\cdot)$ 的定义知

$$\varphi_z(z_0)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\Psi(z)}\right)\bigg|_{z=z_0}=-\frac{\Psi_z(z_0)}{\Psi(z_0)^2}=-\frac{p}{(v(z_0)-k)^2},$$

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{\Psi(z_0)}=\frac{1}{v(z_0)-k}.$$

因此,(1.63)式等价于

$$F(z_0,\ v(z_0),\ p)\leqslant 0. \qquad (1.64)$$

这便证得 2°(关于粘性上解的证明是完全对称的)。

2°⇒1°　假设对任何 $z_0\in Q$, $p\in D^+v(z_0)$, 均有(1.64)式, 则对任何 $\varphi(\cdot)\in\mathscr{D}^+(Q)$, $k\in\mathbf{R}$. 设 $\varphi(v-k)$ 在 z_0 处达到局部正的极大值. 则在 z_0 的某邻域里,

$$\varphi(z)(v(z)-k)\leqslant\varphi(z_0)(v(z_0)-k), \qquad (1.65)$$

即有

$$\begin{aligned} v(z)&\leqslant k+\frac{\varphi(z_0)}{\varphi(z)}(v(z_0)-k)\\ &=k+(v(z_0)-k)-\left(\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0)-k),\ z-z_0\right)\\ &\quad+o(|z-z_0|). \end{aligned} \qquad (1.66)$$

因此,由 $D^+v(z_0)$ 的定义知

$$-\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0)-k)\in D^+v(z_0). \qquad (1.67)$$

由假设,得到

$$F(z_0,\ v(z_0),\ -\frac{\varphi_z(z_0)}{\varphi(z_0)}(v(z_0)-k))\leqslant 0.$$

故, $v(\cdot)$ 是(1.34)的粘性下解.

2°⇒3°　设对任何 $z_0\in Q$, $p\in D^+v(z_0)$, (1.64) 式均成立. 则对任何 $\varphi(\cdot)\in C^1(Q)$, 假如 $v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 $z_0\in Q$ 达

到局部极大。则对任何 z_0 附近的 z，有

$$
\begin{aligned}
v(z) &\leqslant v(z_0) - \varphi(z_0) + \varphi(z) \\
&= v(z_0) + \langle \varphi_z(z_0), z - z_0 \rangle + o(|z - z_0|).
\end{aligned} \tag{1.68}
$$

因此，$\varphi_z(z_0) \in D^+ v(z_0)$。从而，由假设得

$$
F(z_0, v(z_0), \varphi_z(z_0)) \leqslant 0. \tag{1.69}
$$

3°⇒2° 对任何 $z_0 \in Q$，$p \in D^+ v(z_0)$，由引理1.9知存在 $\varphi(\cdot) \in C^1(Q)$，使得

$$
\begin{cases}
\varphi(z_0) = v(z_0), \\
\varphi_z(z_0) = p, \\
\varphi(z) > v(z), \quad \forall z \neq z_0, \quad |z - z_0| < \delta.
\end{cases} \tag{1.70}
$$

故知函数 $v(\cdot) - \varphi(\cdot)$ 在 z_0 处达到局部极大。由假设得

$$
0 \geqslant F(z_0, v(z_0), \varphi_z(z_0)) = F(z_0, v(z_0), p).
$$

这便完成了定理的证明。

以后，将上述后两个命题也均作为粘性解的定义。许多场合下，用它们是十分方便的。

下面，讨论粘性解的一些基本性质。

命题 1.10 设 $v(\cdot) \in C^1(Q)$ 为 (1.34) 的一个古典解，则它必为 (1.34) 的一个粘性解。反之，若 $v(\cdot) \in C(Q)$ 为 (1.34) 的一个粘性解，则对任何 $v(\cdot)$ 的可导点 $z_0 \in Q$，必有

$$
F(z_0, v(z_0), v_z(z_0)) = 0. \tag{1.71}
$$

特别地，当 $v(\cdot) \in C^1(Q)$ 时，$v(\cdot)$ 必为 (1.34) 的一个古典解。

证 当 $v(\cdot) \in C^1(Q)$ 为(1.34)的一个古典解时，易知它必为(1.34)的一个粘性解。今设 $v(\cdot) \in C(Q)$ 为 (1.34)的一个粘性解，且 $v_z(z_0)$ 存在。则

$$
D^- v(z_0) \cap D^+ v(z_0) = \{v_z(z_0)\}. \tag{1.72}
$$

从而，由粘性解的等价定义知，(1.71)式成立。

上述结果表明，粘性解确实是古典解的一种推广。

命题 1.11 设 $F_m: Q\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 为连续函数，满足

$$\lim_{m\to\infty}F_m(z,\ r,\ p)=F(z,\ r,\ p) \tag{1.73}$$

关于 $(z,\ r,\ p)$ 在任何 $Q\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$ 的紧子集上一致。设 $v^m(\cdot)\in C(Q)$ 为

$$F_m(z,\ v^m(z),\ v^m_z(z))=0,\ z\in Q \tag{1.74}$$

的一个粘性解，且

$$v^m(z)\to v(z),\quad (m\to\infty) \tag{1.75}$$

关于 z 在 Q 的任何紧子集上一致。则 $v(\cdot)$ 是 (1.34) 的一个粘性解。

证 设 $\varphi(\cdot)\in C^1(Q)$，$v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 $z_0\in Q$ 处达到极大值，令 $\eta(\cdot)\in C_0^\infty(Q)$，满足

$$\begin{cases}\eta(z_0)=1,\\ 0\leqslant\eta(z)<1,\quad \forall z\in Q\setminus\{z_0\}.\end{cases} \tag{1.76}$$

则易知，$v(\cdot)-(\varphi(\cdot)-\eta(\cdot))$ 在 z_0 处达到局部严格极大值。由于 $v^m(\cdot)$在 z_0 的邻域里一致收敛于 $v(\cdot)$，故可找到 $z_m\in Q$，使得 $v^m(\cdot)-(\varphi(\cdot)-\eta(\cdot))$ 在 z_m 处达到局部极大，且 $z_m\to z_0$，于是，由粘性解的定义知(注意 $\eta_z(z_0)=0$)。

$$F(z_m,\ v^m(z_m),\ \varphi_z(z_m))\leqslant 0. \tag{1.77}$$

因此，令 $m\to\infty$，可得

$$F(z_0,\ v(z_0),\ \varphi_z(z_0))\leqslant 0. \tag{1.78}$$

所以 $v(\cdot)$ 是 (1.34) 的一个粘性下解。同理可证，$v(\cdot)$ 是(1.34)的一个粘性上解。

上面的结果常称为粘性解的稳定性，即当方程作一摄动后，对应的粘性解收敛，则极限必为极限方程的粘性解。下面

的结果在证明方程(1.34)粘性解的存在性时是很有用的。

定理 1.12 设 $F_\varepsilon\in C(Q\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n)$，$\varepsilon>0$，满足 $F_\varepsilon\to F$ $(\varepsilon\to0)$在 $Q\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$ 的任何紧子集上一致，设 $v^\varepsilon(\cdot)\in C^2(Q)$ 为下述方程的一个古典解：

$$-\varepsilon Av^\varepsilon+F(z,\ v^\varepsilon,\ v^\varepsilon_z)=0,\quad z\in Q. \qquad (1.79)$$

此处，A 为一个常系数的二阶椭圆型微分算子（未必是一致椭圆的）。假设 $v^\varepsilon(\cdot)$ 在 Q 的任何紧子集上一致收敛于 $v(\cdot)$。则 $v(\cdot)$ 为(1.34)的一个粘性解。

证 首先，对任何的 $\varphi(\cdot)\in C^2(Q)$，假设 $v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 $z_0\in Q$ 处达到局部极大，则令 $\eta(\cdot)$ 如 (1.76) 式，我们有 $v(\cdot)-(\varphi(\cdot)-\eta(\cdot))$ 在 z_0 处达到局部严格极大。从而由 $v^\varepsilon(\cdot)$ 在 Q 的紧子集上一致收敛于 $v(\cdot)$的假设知，存在$z_\varepsilon\to z$，使得 $v^\varepsilon(\cdot)-(\varphi(\cdot)-\eta(\cdot))$ 在 z_ε 处达到局部极大。从而，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial z}[v^\varepsilon(z)-(\varphi(z)-\eta(z))]\big|_{z=z_\varepsilon}=0,\\ A[v^\varepsilon(z)-(\varphi(z)-\eta(z))]\big|_{z=z_\varepsilon}\leqslant0.\end{cases} \qquad (1.80)$$

因此，

$$\begin{aligned}F_\varepsilon(z_\varepsilon,\ v^\varepsilon(z_\varepsilon),\ v^\varepsilon_z(z_\varepsilon))&=\varepsilon A[v^\varepsilon-(\varphi-\eta)](z_\varepsilon)\\ &+\varepsilon A(\varphi-\eta)(z_\varepsilon)\leqslant\varepsilon A(\varphi-\eta)(z_\varepsilon).\end{aligned} \qquad (1.81)$$

注意到 $\eta_z(z_\varepsilon)=0$，所以，由(1.80)式知

$$v^\varepsilon_z(z_\varepsilon)=\varphi_z(z_\varepsilon). \qquad (1.82)$$

因此，(1.81)式变为

$$F_\varepsilon(z_\varepsilon,\ v^\varepsilon(z_\varepsilon),\ \varphi_z(z_\varepsilon))\leqslant\varepsilon A(\varphi-\eta)(z_\varepsilon),\quad\forall\varepsilon>0. \qquad (1.83)$$

令 $\varepsilon\to0$，得到

$$F(z_0,\ v(z_0),\ \varphi_z(z_0))\leqslant0. \qquad (1.84)$$

今对于任何 $\varphi(\cdot)\in C^1(Q)$，仍设 $v(\cdot)-\varphi(\cdot)$在 $z_0\in Q$ 处达到

局部极大。令 $\varphi_m(\cdot)\in C^2(Q)$，使得 $\varphi_m(\cdot)\to\varphi(\cdot)$，$\varphi_{mz}(\cdot)\to\varphi_z(\cdot)$，在 Q 的每个紧子集上一致。则有 $z_m\to z_0$，使得 $v(\cdot)-(\varphi_m(\cdot)-\eta(\cdot))$ 在 z_m 处达到局部极大。从而，由(1.84)式知

$$F(z_m,\ v(z_m),\ \varphi_{mz}(z_m))\leqslant 0,\quad \forall m\geqslant 1. \tag{1.85}$$

令 $m\to\infty$，得到

$$F(z_0,\ v(z_0),\ \varphi_z(z_0))\leqslant 0.$$

因此，$v(\cdot)$ 是(1.34)的一个粘性下解。同理，可证 $v(\cdot)$ 也是(1.34)的一个粘性上解。

值得注意的是，在上面的定理中，A 未必是一致椭圆的。这一点是有意义的。对于由无限时区定常控制问题导致的与时间无关的 HJB 方程，我们将取 A 为普通的 Laplace 算子 Δ。此时，它是一个一致椭圆算子。而对于由有限时区问题导致的含时间的 HJB 方程，有 $z=(t,\ x)$。此时，A 取作是关于 x 变量的 Laplace 算子 Δ。显然，它关于变量 z 是一个椭圆算子，但不是一致椭圆的。

现在，证明第二章 §1—2 中研究的经典最优控制问题的值函数是相应的 HJB 方程的粘性解。首先考虑无限时区问题。为方便起见，将第二章的(2.50)式重写于下：

$$\lambda v(x)-H(x,\ v_x(x))=0,\quad x\in \boldsymbol{R}^n. \tag{1.86}$$

其中，

$$H(x,\ p)=\inf_{u\in U}\{f^0(x,\ u)+(p,\ f(x,\ u))\},$$
$$\forall (x,\ p)\in \boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}^n. \tag{1.87}$$

今设 $\varphi(\cdot)\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$，使 $v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 x_0 点达到局部极大值，则对于 $t>0$ 充分小，有

$$v(x_0)-\varphi(x_0)\geqslant v(y_{x_0}(t))-\varphi(y_{x_0}(t)), \tag{1.88}$$

易知，上式关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\ \infty)$ 是一致的（见第二章(2.10)

式的第三个估计式)。则对任何固定的 $u_0\in U$，由第二章定理 2.6 可得

$$
\begin{aligned}
0=&\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,t]}\left\{\int_0^t e^{-\lambda\tau}f^0(y_{x_0}(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\right.\\
&\left.+e^{-\lambda t}v(y_{x_0}(t))-v(x_0)\right\}\\
\leqslant&\int_0^t e^{-\lambda\tau}f^0(y_{x_0}(\tau),u_0)\mathrm{d}\tau+(e^{-\lambda t}-1)v(y_{x_0}(t))\\
&+\varphi(y_{x_0}(t))-\varphi(x_0).
\end{aligned}
$$

因此，两边除以 $t>0$，再令 $t\downarrow 0$，可得

$$
0\leqslant f^0(x_0,u_0)+(\varphi_x(x_0),f(x_0,u_0))-\lambda v(x_0),\ \forall u_0\in U. \tag{1.89}
$$

上式中关于 $u_0\in U$ 取下确界，可得

$$
\lambda v(x_0)-H(x_0,\varphi_x(x_0))\leqslant 0. \tag{1.90}
$$

所以，$v(\cdot)$ 是(1.86)式的一个粘性下解。

今若 $v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 x_0 点达到局部极小值，则对 $t>0$ 足够小，一致地关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)$，成立着

$$
v(x_0)-\varphi(x_0)\leqslant v(y_{x_0}(t))-\varphi(y_{x_0}(t)). \tag{1.91}
$$

因此，由第二章定理 2.6 知

$$
\begin{aligned}
0=&\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,t]}\left\{\int_0^t e^{-\lambda\tau}f^0(y_{x_0}(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\right.\\
&\left.+e^{-\lambda t}v(y_{x_0}(t))-v(x_0)\right\}\\
\geqslant&\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,t]}\left\{\int_0^t e^{-\lambda\tau}f^0(y_{x_0}(\tau),u(\tau))\mathrm{d}\tau\right.\\
&\left.+(e^{-\lambda t}-1)v(y_{x_0}(t))+\varphi(y_{x_0}(t))-\varphi(x_0)\right\}.
\end{aligned} \tag{1.92}
$$

两边除以 $t>0$，可得

$$
\begin{aligned}
0 \geqslant & \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,t]} \left\{ \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\lambda\tau} f^0(y_{x_0}(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau \right. \\
& \left. + \frac{e^{-\lambda t}-1}{t} v(y_{x_0}(t)) + \frac{\varphi(y_{x_0}(t)) - \varphi(x_0)}{t} \right\} \\
= & \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,t]} \left\{ \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\lambda\tau} f^0(x_0, u(\tau))\mathrm{d}\tau \right. \\
& + \frac{e^{-\lambda t}-1}{t} v(y_{x_0}(t)) + \left(\varphi_x(x_0), \int_0^t f(y_{x_0}(\tau), \right. \\
& \left. \left. u(\tau))\mathrm{d}\tau \right) \frac{1}{t} + o(1) \right\} \\
= & \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,t]} \left\{ \frac{1}{t}\int_0^t [f^0(x_0, u(\tau)) + (\varphi_x(x_0), f(x_0, \right. \\
& \left. u(\tau))]\mathrm{d}\tau + \frac{e^{-\lambda t}-1}{t} v(y_{x_0}(t)) + o(1) \right\} \\
\geqslant & \frac{1}{t}\int_0^t H(x_0, \varphi_x(x_0))\mathrm{d}\tau + \frac{e^{-\lambda t}-1}{t} v(x_0) + o(1) \quad .
\end{aligned}
$$

值得注意的是，上面的 $o(1)$ 关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, \infty)$ 是一致的。从而，令 $t\to 0$，得到

$$0 \geqslant H(x_0, \varphi_x(x_0)) - \lambda v(x_0).$$

即

$$\lambda v(x_0) - H(x_0, \varphi_x(x_0)) \geqslant 0.$$

也就是说，$v(\cdot)$ 是(1.86) 的一个粘性上解。因此，$v(\cdot)$ 是(1.86)的一个粘性解。

完全类似地可以证明有限时区非定常问题的值函数 $v(t, x)$ 是下述方程的一个粘性解，

$$
\begin{cases}
-v_t(t, x) - H(t, x, v_x(t, x)) = 0, & (t, x)\in[0, T)\times \boldsymbol{R}^n, \\
v(T, x) = h(x), & x\in \boldsymbol{R}^n,
\end{cases}
\tag{1.93}
$$

此处，$H(t, x, p)$ 由第二章 (2.27) 式定义。值得注意的是，在研究古典解时，(1.93)与第二章(2.26)是等价的，但在讨论

粘性解时，两者是不等价的(见例 1.7)。

下面，讨论二人零和微分对策问题。我们将说明下值函数 $V^-(t,x)$ 是下述方程的一个粘性解，

$$\begin{cases} -V_t^-(t,x) - H^-(t,x,V_x^-(t,x)) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad (t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^n, \\ V^-(T,x) = h(x), \quad x\in\mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1.94}$$

其中，

$$\begin{aligned} H^-(t,x,p) = \sup_{w\in W}\inf_{u\in U}\{&f^0(t,x,u,w) \\ &+\langle p, f(t,x,u,w)\rangle\}, \\ &\forall(t,x,p)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n. \end{aligned} \tag{1.95}$$

为此，设 $\varphi(\cdot,\cdot)\in C^1([0,T]\times\mathbf{R}^n)$，$V^-(\cdot,\cdot)-\varphi(\cdot,\cdot)$ 在 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^n$ 达到局部极大。则只要 $0<\hat{t}-t$ 足够小，一致地对 $\alpha\in\mathscr{A}[t,T]$，$w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]$ 成立着

$$V^-(t,x)-\varphi(t,x)\geqslant V^-(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t}))-\varphi(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t})), \tag{1.96}$$

此处，$y_{t,x}(\cdot)$ 是对应于 $(\alpha[w(\cdot)],w(\cdot))$ 的轨线。因此，由第二章(3.33)式可得

$$\begin{aligned} 0\leqslant \inf_{\alpha\in\mathscr{A}[t,T]}\sup_{w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]}\Big\{&\int_t^{\hat{t}} f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),\alpha[w(\cdot)](\tau), \\ &w(\tau))\mathrm{d}\tau+\varphi(\hat{t},y_{t,x}(\hat{t}))-\varphi(t,x)\Big\}. \end{aligned} \tag{1.97}$$

利用第二章定理 3.4 的证明，可知，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\alpha_\varepsilon\in\mathscr{A}[t,T]$，使得对任何 $w(\cdot)\in\mathscr{W}[t,T]$，$s\in[t,T]$，

$$\begin{aligned} &f^0(t,x,\alpha_\varepsilon[w(\cdot)](s),w(s)) \\ &+\langle\varphi_x(t,x), f(t,x,\alpha_\varepsilon[w(\cdot)](s),w(s))\rangle \\ &\leqslant\inf_{u\in U}\{f^0(t,x,u,w(s)) \\ &\quad+\langle\varphi_x(t,x), f(t,x,u,w(s))\rangle\}+\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.98}$$

因此，由(1.97)式知，$\forall s>t$，

$$0\leqslant \sup_{w(\cdot)\in \mathcal{W}[t,T]}\left\{\int_t^s f^0(\tau, y_{t,x}(\tau), \alpha_s[w(\cdot)](\tau), w(\tau))\mathrm{d}\tau + \varphi(s, y_{t,x}(s)) - \varphi(t,x)\right\}$$

$$= \sup_{w(\cdot)\in \mathcal{W}[t,T]}\left\{\int_t^s f^0(t, x, \alpha_s[w(\cdot)](\tau), w(\tau))\mathrm{d}\tau + \varphi_t(t,x)(s-t) + (\varphi_x(t,x), y_{t,x}(s)-x) + o(|s-t| + \|y_{t,x}(s)-x\|)\right\}$$

$$= \sup_{w(\cdot)\in \mathcal{W}[t,T]}\left\{\int_t^s [f^0(t, x, \alpha_s[w(\cdot)](\tau), w(\tau)) + (\varphi_x(t,x), f(t,x,\alpha_s[w(\cdot)], w(\cdot)))]\mathrm{d}\tau + \varphi_t(t,x)(s-t) + o(|s-t|)\right\}$$

$$\leqslant \int_t^s \sup_{w\in W}\inf_{u\in U}[f^0(t,x,u,w) + (\varphi_x(t,x), f(t,x,u,w))]\mathrm{d}\tau + \varepsilon(s-t) + \varphi_t(t,x)(s-t) + o(|s-t|)$$

$$= [\varphi_t(t,x) + H(t,x,\varphi_x(t,x)) + \varepsilon](s-t) + o(|s-t|).$$

注意到 $\varepsilon>0$ 的任意性，可得

$$-\varphi_t(t,x) - H(t,x,\varphi_x(t,x))\leqslant 0.$$

所以 $V^-(\cdot,\cdot)$是(1.94)的一个粘性下解。利用同样的方法，参照第二章定理3.4的证明，可证 $V^-(\cdot,\cdot)$ 也是(1.94)的一个粘性上解。因此，$V^-(\cdot,\cdot)$ 是(1.94)的一个粘性解。类似地，可以证明 $V^+(\cdot,\cdot)$ 是下述方程的一个粘性解。

$$\begin{cases} -v_t(t,x) - H^+(t,x,v_x(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T)\times \boldsymbol{R}^n, \\ v(T,x) = h(x), & x\in \boldsymbol{R}^n, \end{cases} \tag{1.99}$$

此处，

$$H^+(t, x, p) = \inf_{u\in U} \sup_{w\in W}\{f^0(t, x, u, w) + (p, f(t, x, u, w))\},$$

$$\forall (t, x, p)\in[0, T]\times \boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}^n. \tag{1.100}$$

我们看到，第二章的(2.26)、(3.50)和(3.52)式均是终值问题(即在 $t=T$ 处给定值)。因此，在讨论粘性解时，不得不在(1.93)、(1.94)和(1.99)式中将方程改写。有时候，人们对于这样的终值问题不是改写方程，而是改动粘性解的定义。具体叙述如下：

定义 1.13 称 $v(\cdot, \cdot)\in C([0, T]\times \boldsymbol{R}^n)$ 为下述问题的一个粘性下(上)解，

$$\begin{cases} v_t(t, x) + H(t, x, v(t, x), v_x(t, x)) = 0, \\ \qquad (t, x)\in[0, T)\times \boldsymbol{R}^n, \\ v(T, x) = h(x), \quad x\in \boldsymbol{R}^n, \end{cases} \tag{1.101}$$

如果 $v(T, x) = h(x)$，$\forall x\in \boldsymbol{R}^n$，且对任何 $\varphi(\cdot, \cdot)\in C^1([0, T]\times \boldsymbol{R}^n)$，只要 $v(\cdot, \cdot)-\varphi(\cdot, \cdot)$ 在 $(t_0, x_0)\in[0, T)\times \boldsymbol{R}^n$ 处达到局部极大(小)值，则必有

$$\varphi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, v(t_0, x_0), \varphi_x(t_0, x_0))\geqslant 0, \ (\leqslant 0). \tag{1.102}$$

而当 $v(\cdot, \cdot)$ 同时为(1.101) 的粘性下解和粘性上解时，称 $v(\cdot, \cdot)$ 为(1.101)的一个粘性解。

§2 唯一性定理

本节将给出作为粘性解理论最具重要性的部分——唯一性定理。将分别讨论稳态方程(不含时间的)，以及非稳态方程(即含有时间的)。这两类问题的唯一性定理是有一些差别

的。

首先考虑下述稳态方程粘性解的唯一性：

$$v(x)-H(x,v_x(x))=0,\quad x\in \boldsymbol{R}^n. \tag{2.1}$$

此处，并不限制 $H(x,p)$ 仅形如第二章 (2.51) 式。由于第二章(2.50)式中的 $\lambda>0$，故不妨设 $\lambda=1$（当 $\lambda\neq 1$ 时，读者不难将其化为(2.1)式的形式）。对函数 $H:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 作如下假设：存在常数 $A,B\geqslant 0$，以及连续函数 $\omega:\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$\omega$ 关于其每个变量均单调增加，且 $\omega(r,0)=0$，$\forall r\geqslant 0$，使得

$$|H(x,p)-H(x,q)|\leqslant(A|x|+B)|p-q|,\quad \forall x,p,q\in\boldsymbol{R}^n, \tag{2.2}$$

$$|H(x,p)-H(y,p)|\leqslant\omega(|x|\vee|y|,|x-y|(1+|p|)),\quad \forall x,y,p\in\boldsymbol{R}^n. \tag{2.3}$$

易知，当第二章中 (H1)′ 成立时，由第二章(2.51)式定义的 $H(x,p)$ 是满足上述条件的。

现在，引进两个函数类：

$$Q_m(\boldsymbol{R}^n)=\left\{v(\cdot)\in C(\boldsymbol{R}^n):\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}\frac{|v(x)|}{1+|x|^m}<\infty\right\},\quad m>0, \tag{2.4}$$

$$E_\lambda(\boldsymbol{R}^n)=\{v(\cdot)\in C(\boldsymbol{R}^n):\lim_{|x|\to\infty}v(x)e^{-\lambda|x|}=0\},\quad \lambda>0, \tag{2.5}$$

下面，叙述并证明粘性解的唯一性定理。

定理 2.1 设(2.2)、(2.3)式成立。

(i) 若 $A>0$，$v(\cdot)$，$\hat{v}(\cdot)\in\bigcup_{m<1/A}Q_m(\boldsymbol{R}^n)$ 为 (2.1) 式的两个粘性解。则 $v(\cdot)=\hat{v}(\cdot)$。

(ii) 若 $A=0$，$B>0$，$v(\cdot)$，$\hat{v}(\cdot)\in E_{1/B}(\boldsymbol{R}^n)$ 为 (2.1) 的两个粘性解。则 $v(\cdot)=\hat{v}(\cdot)$。

证 (i) 定义

$$\Phi(x, y) = v(x) - \hat{v}(y) - \frac{1}{\varepsilon}|x-y|^2 - \alpha(\langle x\rangle^m + \langle y\rangle^m),$$
$$x, y \in \mathbf{R}^n, \tag{2.6}$$

此处，$\varepsilon, \alpha > 0$，而 $m < \frac{1}{A}$，使得 $v(\cdot), \hat{v}(\cdot) \in \bigcup_{\mu<m} Q_\mu(\mathbf{R}^n)$。另外，

$$\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}.$$

由于 $v(\cdot), \hat{v}(\cdot) \in \bigcup_{\mu<m} Q_\mu(\mathbf{R}^n)$，可见

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \Phi(x, y) = -\infty. \tag{2.7}$$

因此，存在 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^{2n}$，使得 $\Phi(\cdot, \cdot)$ 在该点达到其最大值。应该记住 (x_0, y_0) 是依赖于 ε 和 α 的。由

$$\Phi(x_0, x_0) + \Phi(y_0, y_0) \leqslant 2\Phi(x_0, y_0)$$

知

$$v(x_0) - \hat{v}(x_0) - 2\alpha\langle x_0\rangle^m + v(y_0) - \hat{v}(y_0) - 2\alpha\langle y_0\rangle^m$$
$$\leqslant 2(v(x_0) - \hat{v}(y_0)) - \frac{2}{\varepsilon}|x_0 - y_0|^2 - 2\alpha(\langle x_0\rangle^m + \langle y_0\rangle^m).$$

从而，

$$\frac{2}{\varepsilon}|x_0 - y_0|^2 \leqslant v(x_0) - v(y_0) + \hat{v}(x_0) - \hat{v}(y_0). \tag{2.8}$$

由(2.6)式知，存在 $R_\alpha > 0$，与 $\varepsilon > 0$ 无关，使得

$$|x_0|, |y_0| \leqslant R_\alpha. \tag{2.9}$$

因此，由 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 的连续性，可设 $\omega_\alpha: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$，$\omega_\alpha(\cdot)$ 单调上升、连续，且 $\omega_\alpha(0) = 0$，使得

$$|v(x) - v(y)| + |\hat{v}(x) - \hat{v}(y)| \leqslant \omega_\alpha(|x-y|),$$
$$\forall |x|, |y| \leqslant R_\alpha. \tag{2.10}$$

从而，由(2.8)式知

$$|x_0-y_0|^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,\omega_\alpha(|x_0-y_0|)\to 0,\ (\varepsilon\to 0),\tag{2.11}$$

故可知

$$\frac{1}{\varepsilon}|x_0-y_0|^2=o(1),\quad (\varepsilon\to 0),\tag{2.12}$$

由(x_0, y_0)的定义知函数

$$x\mapsto v(x)-\left[\hat{v}(y_0)+\frac{1}{\varepsilon}|x-y_0|^2+\alpha(\langle x\rangle^m+\langle y_0\rangle^m)\right].$$

在x_0点取到局部极大值，再由粘性解的定义知

$$v(x_0)-H\left(x_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)+\alpha m\langle x_0\rangle^{m-2}x_0\right)\leqslant 0。\tag{2.13}$$

同理，函数

$$y\mapsto\hat{v}(y)-\left[v(x_0)-\frac{1}{\varepsilon}|x_0-y|^2-\alpha(\langle x_0\rangle^m+\langle y\rangle^m)\right],$$

在y_0点取到局部极小值，因此，

$$\hat{v}(y_0)-H\left(y_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)-\alpha m\langle y_0\rangle^{m-2}y_0\right)\geqslant 0。\tag{2.14}$$

从而

$$\begin{aligned}
v(x_0)-\hat{v}(y_0)\leqslant{}&H\left(x_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)+\alpha m\langle x_0\rangle^{m-2}x_0\right)\\
&-H\left(y_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)-\alpha m\langle y_0\rangle^{m-2}y_0\right)\\
\leqslant{}&H\left(x_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)\right)+(A|x_0|+B)\alpha m\langle x_0\rangle^{m-2}|x_0|\\
&-H\left(y_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)\right)+(A|y_0|+B)\alpha m\langle y_0\rangle^{m-2}|y_0|\\
\leqslant{}&\omega\left(R_\alpha,\ |x_0-y_0|\left(1+\frac{2}{\varepsilon}|x_0-y_0|\right)\right)\\
&+\alpha m[A(\langle x_0\rangle^m+\langle y_0\rangle^m)+B(\langle x_0\rangle^{m-1}+\langle y_0\rangle^{m-1})].
\end{aligned}\tag{2.15}$$

因而，对任何固定的 $x\in \boldsymbol{R}^n$，由

$$\Phi(x, x)\leqslant\Phi(x_0, y_0)$$

知

$$\begin{aligned}
v(x)-\hat{v}(x)\leqslant & 2\alpha\langle x\rangle^m+v(x_0)-\hat{v}(y_0)\\
&-\frac{1}{\varepsilon}|x_0-y_0|^2-\alpha(\langle x_0\rangle^m+\langle y_0\rangle^m)\\
\leqslant & 2\alpha\langle x\rangle^m+\omega\left(R_\alpha, |x_0-y_0|+\frac{2}{\varepsilon}|x_0-y_0|^2\right)\\
&-\alpha[(1-mA)(\langle x_0\rangle^m+\langle y_0\rangle^m)-mB(\langle x_0\rangle^{m-1}+\langle y_0\rangle^{m-1})]。
\end{aligned} \tag{2.16}$$

由于 $1-mA>0$，上式最右端项[……]是下有界的，故可设

$$\begin{aligned}
v(x)-\hat{v}(x)\leqslant & 2\alpha\langle x\rangle^m\\
&+\omega\left(R_\alpha, |x_0-y_0|+\frac{2}{\varepsilon}|x_0-y_0|^2\right)+\alpha C。
\end{aligned} \tag{2.17}$$

此处的 C 是一个绝对常数（不依赖于 ε 和 α）。因此，利用(2.12)式，在(2.17)式中，先令 $\varepsilon\to 0$，得到

$$v(x)-\hat{v}(x)\leqslant 2\alpha\langle x\rangle^m+\alpha C, \tag{2.18}$$

然后再令 $\alpha\to 0$，得到

$$v(x)\leqslant\hat{v}(x), \quad \forall x\in \boldsymbol{R}^n。 \tag{2.19}$$

因为 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 地位是对称的，得证(i)。

(ii) 由于 $v(\cdot), \hat{v}(\cdot)\in E_{1/B}(\boldsymbol{R}^n)$，故存在有界函数 θ: $\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，使得$\left(记\ \lambda=\dfrac{1}{B}\right)$

$$|v(x)|, |\hat{v}(x)|\leqslant\theta(|x|)e^{\lambda\langle x\rangle}, \quad x\in \boldsymbol{R}^n, \tag{2.20}$$

且

$$\lim_{r\to\infty}\theta(r)=0。 \tag{2.21}$$

今对 $\varepsilon>0$，$\alpha>0$，定义

$$\Phi(x, y) = v(x) - \hat{v}(y) - \frac{1}{\varepsilon}|x-y|^2 - \alpha(e^{\lambda\langle x\rangle} + e^{\lambda\langle y\rangle}),$$

$$x, y \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2.22}$$

余下的证明与(i)几乎是一样的，我们将其留给读者去完成。

值得注意的是，上面对于 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 所作的函数类的限制是必要的。在这限制不满足时，唯一性定理有可能不成立。下面的例子说明了这一点。

例 2.2 设 $n=1$。(即在 $\boldsymbol{R}$ 中考虑问题)

(i) 考虑方程

$$v(x) - \frac{x}{m} v_x(x) = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{2.23}$$

则易知，$A = \frac{1}{m}$。而 $v(x) \equiv 0$ 和 $v(x) = |x|^m$ 均为(2.23)式的粘性解。当作 $v(\cdot) \in \bigcup_{m<\frac{1}{A}} Q_m(\boldsymbol{R}^n)$ 限制时，唯一的粘性解为 $v(x) \equiv 0$。

(ii) 考虑方程($B>0$)

$$v(x) - Bv_x(x) = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{2.24}$$

则 $A=0$。易证，$v(x) \equiv 0$ 和 $v(x) = e^{\frac{x}{B}}$ 为(2.24)的两个不同的粘性解。当作 $v(\cdot) \in \boldsymbol{E}_{1/B}(\boldsymbol{R}^n)$ 限制时，唯一的粘性解为 $v(x) \equiv 0$。

利用定理 2.1 和 §1 中的讨论，立即得到下述结论。

推论 2.3 设第二章 §2 中 (H1) 及第二章 (2.43) 式成立，则问题 $\widetilde{C}'$ 的值函数 $v(\cdot)$ 是第二章方程 (2.50) 式唯一的粘性解。

这里应注意的是，

$$A = \frac{L_0}{\lambda}. \tag{2.25}$$

而由第二章 (2.46) 式知，值函数

$$v(\cdot)\in Q_{r+\delta}(\boldsymbol{R}^n). \tag{2.26}$$

因此，为使唯一性定理中的条件得以满足，需要

$$r+\delta<\frac{1}{A}=\frac{\lambda}{L_0}.$$

这正好是第二章条件 (2.43) 式。当 $L_0=0$ 时，值函数 $v(\cdot)$ 仍然是幂函数形式的增长阶数。此时，$v(\cdot)\in E_{1/L}(\boldsymbol{R}^n)$ (当然假设 $L>0$，否则问题是平凡的)，因此，唯一性仍成立。

至此，问题 $\tilde{C}'$ 的值函数被第二章方程 (2.50) 式在数学上严格地刻划了。

下面，考虑非稳态方程。方程和终值如下：

$$\begin{cases} v_t(t,x)+H(t,x,v_x(t,x))=0, & (t,x)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n, \\ v(T,x)=h(x). \end{cases} \tag{2.27}$$

此处，设 $H:[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 是连续的，且存在常数 A，$B\geqslant0$，以及连续函数 $\omega:\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$\omega$ 关于其每个变量均单调增加，$\omega(r,0)=0$，$\forall r\geqslant0$，使得

$$|H(t,x,p)-H(t,x,q)|\leqslant(A|x|+B)|p-q|,$$
$$\forall t\in[0,T],\ x,p,q\in\boldsymbol{R}^n, \tag{2.28}$$

$$|H(t,x,p)-H(t,y,p)|$$
$$\leqslant\omega(|x|\vee|y|,\ |x-y|(1+|p|)),$$
$$\forall t\in[0,T],\ x,y,p\in\boldsymbol{R}^n. \tag{2.29}$$

注意到，若第二章 §2 中(H1)成立，则由第二章 (2.27) 定义的函数 $H(t,x,p)$ 满足上面的(2.28)、(2.29)式。下面叙述并证明问题 (2.27)粘性解的唯一性定理。值得注意的是，下面的粘性解的定义是取之于定义 1.13。

定理 2.4 设(2.28)、(2.29)成立，且 $h(\cdot)\in C(\boldsymbol{R}^n)$。设

$v(\cdot),\ \hat{v}(\cdot)\in C([0,T]\times\mathbf{R}^n)$ 为(2.27)的两个粘性解，则

$$v(\cdot)=\hat{v}(\cdot).$$

证 设 $A>0$. 现证

$$v(t,x)\leqslant\hat{v}(t,x),\quad\forall(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n. \tag{2.30}$$

用反证法，假如(2.30)式不成立。不妨设

$$\sup_{(t,x)\in\mathscr{O}}[v(t,x)-\hat{v}(t,x)]\geqslant\sigma>0. \tag{2.31}$$

此处，

$$\mathscr{O}=\{(t,x)\in(T-T_0,T)\times\mathbf{R}^n;\ |x|<L_0(t-T+T_0)\}, \tag{2.32}$$

$$0<T_0<T,\quad T_0<\frac{1}{A},\quad L_0=\frac{B}{1-AT_0}. \tag{2.33}$$

由(2.28)式知，$\forall(t,x)\in\mathscr{O}$，$p,q\in\mathbf{R}^n$，

$$\begin{aligned}|H(t,x,p)-H(t,x,q)|&\leqslant(A|x|+B)|p-q|\\&\leqslant[AL_0(t-T+T_0)+B]|p-q|\\&\leqslant(AL_0T_0+B)|p-q|=L_0|p-q|.\end{aligned} \tag{2.34}$$

现在，任取 $\varepsilon,\delta>0$，满足

$$\varepsilon+\delta<L_0T_0. \tag{2.35}$$

再设 $K>0$，$\zeta\in C^\infty(\mathbf{R})$，满足

$$K>\sup\{v(t,x)-\hat{v}(s,y);(t,x,s,y)\in\mathscr{O}^2\}. \tag{2.36}$$

$$\zeta(r)=\begin{cases}0, & r\leqslant-\delta,\\-K, & r\geqslant0.\end{cases} \tag{2.37}$$

$$\zeta'(r)\leqslant0,\ \forall r\in\mathbf{R}. \tag{2.38}$$

然后，对于 $\alpha,\beta>0$，以及 $\sigma>0$，定义

$$\begin{aligned}\Phi(t,x,s,y)&=v(t,x)-\hat{v}(s,y)-\frac{1}{\alpha}|x-y|^2\\&-\frac{1}{\beta}|t-s|^2+\zeta(\langle x\rangle_\varepsilon-L_0(t-T+T_0))\\&+\zeta(\langle y\rangle_\varepsilon-L_0(s-T+T_0))+\sigma(t+s)-2\sigma T,\end{aligned}$$

$$(t, x, s, y) \in \mathcal{O}^2, \tag{2.39}$$

此处，$\langle x\rangle_\varepsilon = (|x|^2+\varepsilon^2)^{1/2}$，$\langle y\rangle_\varepsilon = (|y|^2+\varepsilon^2)^{1/2}$。设 $\Phi(t, x, s, y)$ 在 $(t_0, x_0, s_0, y_0) \in \overline{\mathcal{O}}^2$ 达到它在 $\overline{\mathcal{O}}^2$ 上的最大值（注意 Φ 是连续的，而 $\overline{\mathcal{O}}^2$ 是有界闭集）。则由

$$\Phi(T, 0, T, 0) \leqslant \Phi(t_0, x_0, s_0, y_0)$$

知

$$\begin{aligned}
0 &= v(T, 0) - \hat{v}(T, 0) + 2\zeta(\varepsilon - L_0 T_0) \\
&\leqslant v(t_0, x_0) - \hat{v}(s_0, y_0) - \frac{1}{\alpha}|x_0 - y_0|^2 - \frac{1}{\beta}|t_0 - s_0|^2 \\
&\quad + \zeta(\langle x_0\rangle_\varepsilon - L_0(t_0 - T + T_0)) \\
&\quad + \zeta(\langle y_0\rangle_\varepsilon - L_0(s_0 - T + T_0)) + \sigma(t_0 + s_0) - 2\sigma T \\
&< K + \zeta(\langle x_0\rangle_\varepsilon - L_0(t_0 - T + T_0)) \\
&\quad + \zeta(\langle y_0\rangle_\varepsilon - L_0(s_0 - T + T_0)) + \sigma(t_0 + s_0) - 2\sigma T.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

因此，若 $|x_0| = L_0(t_0 - T + T_0)$ 或 $|y_0| = L_0(s_0 - T + T_0)$，则有

$$0 < K - K + \sigma(t_0 + s_0) - 2\sigma T \leqslant 0.$$

显然矛盾，故知

$$|x_0| < L_0(t_0 - T + T_0), \quad |y_0| < L_0(s_0 - T + T_0), \tag{2.41}$$

再由

$$\begin{aligned}
&\Phi(t_0, x_0, t_0, x_0) + \Phi(s_0, y_0, s_0, y_0) \\
&\leqslant 2\Phi(t_0, x_0, s_0, y_0),
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
&v(t_0, x_0) - \hat{v}(t_0, x_0) + 2\zeta(\langle x_0\rangle_\varepsilon - L_0(t_0 - T + T_0)) \\
&+ v(s_0, y_0) - \hat{v}(s_0, y_0) + 2\zeta(\langle y_0\rangle_\varepsilon - L_0(s_0 - T + T_0)) \\
&+ 2\sigma t_0 + 2\sigma s_0 - 4\sigma T.
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2v(t_0, x_0) - 2\hat{v}(s_0, y_0) - \frac{2}{\alpha}|x_0 - y_0|^2 - \frac{2}{\beta}|t_0 - s_0|^2$$

$$+ 2\zeta(\langle x_0\rangle_\varepsilon - L_0(t_0 - T + T_0))$$

$$+ 2\zeta(\langle y_0\rangle_\varepsilon - L_0(s_0 - T + T_0)) + 2\sigma(s_0 + t_0) - 4\sigma T.$$

也即

$$\frac{2}{\alpha}|x_0 - y_0|^2 + \frac{2}{\beta}|t_0 - s_0|^2 \leqslant v(t_0, x_0) - v(s_0, y_0)$$

$$+ \hat{v}(t_0, x_0) - \hat{v}(s_0, y_0) \leqslant 2\eta(|t_0 - s_0| + |x_0 - y_0|). \tag{2.42}$$

此处

$$\eta(r) = \frac{1}{2}\sup\{|v(t, x) - v(s, y)| + |\hat{v}(t, x) - \hat{v}(s, y)|;$$

$$|t - s| + |x - y| \leqslant r, \ (t, x, s, y) \in \mathcal{O}^2\}. \tag{2.43}$$

易知，$\lim\limits_{r\to 0}\eta(r) = 0$，且由 $\mathcal{O}$ 的有界性知

$$\eta_0 \equiv \sup_{r\geqslant 0}\eta(r) < \infty. \tag{2.44}$$

于是，由(2.42)式可得

$$|x_0 - y_0| \leqslant \sqrt{\alpha\eta_0}, \quad |t_0 - s_0| \leqslant \sqrt{\beta\eta_0}. \tag{2.45}$$

再回到(2.42)式，可得

$$\frac{1}{\alpha}|x_0 - y_0|^2 + \frac{1}{\beta}|t_0 - s_0|^2 \leqslant \eta(\sqrt{\alpha\eta_0} + \sqrt{\beta\eta_0}). \tag{2.46}$$

置

$$\Delta_{\varepsilon,\delta} = \{(t, x) \in \mathcal{O}; \langle x\rangle_\varepsilon \leqslant L_0(t - T + T_0) - \delta\}. \tag{2.47}$$

易知，当 ε, $\delta > 0$ 充分小时，$\Delta_{\varepsilon,\delta} \neq \varnothing$，且

$$\zeta(\langle x\rangle_\varepsilon - L_0(t - T + T_0)) = 0, \ \forall (t, x) \in \Delta_{\varepsilon,\delta}. \tag{2.48}$$

因此，由(2.31)式，可设(当 ε, δ, $\sigma > 0$ 都充分小时)

$$\sup_{(t,x)\in\Delta_{\varepsilon,\delta}} \Phi(t, x, t, x)$$

$$= \sup_{(t,x)\in\Delta_{\varepsilon,\delta}} [v(t, x) - \hat{v}(t, x) + 2\sigma(t - T)] \geqslant \frac{\sigma}{2} > 0, \tag{2.49}$$

另一方面，

$$\sup_{(t,x)\in\Delta_{\varepsilon,\delta}} \Phi(t, x, t, x) \leqslant \sup_{\mathcal{O}^2} \Phi(t, x, s, y)$$
$$= \Phi(t_0, x_0, s_0, y_0) \leqslant v(t_0, x_0) - \hat{v}(s_0, y_0), \tag{2.50}$$

存在 $r>0$，使当 $0<\alpha, \beta<r$ 时，

$$(t_0, x_0, s_0, y_0) \in \mathcal{O}^2. \tag{2.51}$$

此处，应注意(t_0, x_0, s_0, y_0)是依赖于 $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta, \sigma$ 的。事实上，若(2.51)式不正确，注意到(2.41)式，只有一种可能，即存在序列 $\{(\alpha_m, \beta_m)\}$，$\alpha_m \to 0$，$\beta_m \to 0$，而对应于 (α_m, β_m) 的 Φ 在 $\overline{\mathcal{O}}^2$ 上的极大值点(t_m, x_m, s_m, y_m)满足

$$t_m = T \text{ 或 } s_m = T, \quad \forall m \geqslant 1. \tag{2.52}$$

由(2.45)式知，

$$|x_m - y_m| \to 0, \quad t_m, s_m \to T. \ (m \to \infty) \tag{2.53}$$

因此，由(2.49)和(2.50)式知

$$0 < \frac{\sigma}{2} \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} (v(t_m, x_m) - \hat{v}(s_m, y_m)) = 0.$$

则显然矛盾。故(2.51)式成立。于是，对于 $0<\alpha, \beta<r$，由 (t_0, x_0, s_0, y_0) 的定义知函数

$$(t, x) \to v(t, x) - \Big\{\hat{v}(s_0, y_0) + \frac{1}{\alpha}|x - y_0|^2 + \frac{1}{\beta}|t - s_0|^2$$
$$- \zeta(\langle x\rangle_\varepsilon - L_0(t - T + T_0)) - \zeta(\langle y_0\rangle_\varepsilon - L_0(s_0 - T + T_0))$$
$$- \sigma(t + s_0) + 2\sigma T\Big\}.$$

在 $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$ 处达到局部极大。因此，由定义 1.13 知

$$\frac{2}{\beta}(t_0-s_0)+\zeta'(\langle x_0\rangle_\varepsilon-L_0(t_0-T+T_0))L_0-\sigma$$

$$+H\Big(t_0,x_0,\frac{2}{\alpha}(x_0-y_0)-\zeta'(\langle x_0\rangle_\varepsilon$$

$$-L_0(t_0-T+T_0))\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}\Big)\geqslant 0。\tag{2.54}$$

而函数

$$(s,y)\mapsto\hat{v}(s,y)-\Big\{v(t_0,x_0)-\frac{1}{\alpha}|x_0-y|^2-\frac{1}{\beta}|t_0-s|^2$$

$$+\zeta(\langle x_0\rangle_\varepsilon-L_0(t_0-T+T_0))+\zeta(\langle y\rangle_\varepsilon-L_0(s-T+T_0))$$

$$+\sigma(t_0+s)-2\sigma T\Big\}。$$

在 $(s_0,y_0)\in\mathscr{O}$ 处达到局部极小值。因此，

$$\frac{2}{\beta}(t_0-s_0)-\zeta'(\langle y_0\rangle_\varepsilon-L_0(s_0-T+T_0))L_0+\sigma$$

$$+H\Big(s_0,y_0,\frac{2}{\alpha}(x_0-y_0)+\zeta'(\langle y_0\rangle_\varepsilon$$

$$-L_0(s_0-T+T_0))\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon}\Big)\leqslant 0。\tag{2.55}$$

简记

$$\begin{cases}X=\langle x_0\rangle_\varepsilon-L_0(t_0-T+T_0),\\ Y=\langle y_0\rangle_\varepsilon-L_0(s_0-T+T_0)。\end{cases}$$

综合(2.54)和(2.55)式可得

$$2\sigma\leqslant L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)]$$

$$+H\Big(t_0,x_0,\frac{2}{\alpha}(x_0-y_0)-\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}\Big)$$

$$-H\Big(s_0,y_0,\frac{2}{\alpha}(x_0-y_0)+\zeta'(Y)\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon}\Big)。\tag{2.56}$$

取适当的子列 $\beta\searrow 0$，使得 (t_0,x_0,s_0,y_0) 收敛，记其极限仍为 (t_0,x_0,s_0,y_0)。由(2.45)式知，对此极限，有 $t_0=s_0$。因此，

(2.56)式变为

$$
\begin{aligned}
2\sigma \leqslant & L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)] \\
& + H\left(t_0, x_0, \frac{2}{\alpha}(x_0-y_0)-\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}\right) \\
& - H\left(t_0, y_0, \frac{2}{\alpha}(x_0-y_0)+\zeta'(Y)\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon}\right) \\
\leqslant & L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)]+L_0\left|\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}+\zeta'(Y)\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon}\right| \\
& + \omega\left(|x_0|\vee|y_0|, |x_0-y_0|\left[1+\left|\frac{2}{\alpha}(x_0-y_0)\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. -\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}\right|\right]\right) \leqslant L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)] \\
& + L_0[|\zeta'(X)|+|\zeta'(Y)|] \\
& + \omega\left(|x_0|\vee|y_0|, |x_0-y_0|(1+|\zeta'(X)|)+\frac{2}{\alpha}|x_0-y_0|^2\right).
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

注意到 $\zeta'(r)\leqslant 0$, 知

$$
\begin{aligned}
2\sigma \leqslant \omega\Big(& |x_0|\vee|y_0|, |x_0-y_0|(1+|\zeta'(X)|) \\
& +\frac{2}{\alpha}|x_0-y_0|^2\Big).
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

再由(2.46)式, 令 $\alpha\to 0$, 得到

$$\sigma\leqslant 0.$$

这与所设 $\sigma>0$ 矛盾。故反证假设不成立, 也即 (2.30) 式成立。由于 $v(\cdot,\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot,\cdot)$ 地位是对称的,定理得证。

对稳态方程, 需要对粘性解所属的函数类作进一步的限制才成立唯一性定理。而对于上述非稳态的方程, 这种限制是不需要的。利用上述定理,立即得到下述的推论。

推论 2.5 设第二章 §2 中(H1) 成立。则问题 $\widetilde{C}$ 的值函数 $v(t,x)$ 是第二章问题(2.26)的唯一的粘性解。

现在，考虑另一个方程

$$\begin{cases} \hat{v}_t(t, x) + \hat{H}(t, x, \hat{v}_x(t, x)) = 0, & (t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n, \\ \hat{v}(T, x) = h(x), & x \in \boldsymbol{R}^n. \end{cases} \tag{2.59}$$

假设 $\hat{H}: [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 满足与 H 相同的条件(2.28)和(2.29)。仔细分析一下定理 2.4 的证明，可以发现实际上我们证明了下述的定理。

定理 2.6 设 H 和 $\hat{H}$ 均满足条件(2.28)和(2.29)。设

$$H(t, x, p) \leqslant \hat{H}(t, x, p), \quad \forall (t, x, p) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n. \tag{2.60}$$

并设 $v(\cdot, \cdot)$、$\hat{v}(\cdot, \cdot) \in C([0, T] \times \boldsymbol{R}^n)$ 分别为问题 (2.27) 和(2.59)的粘性下解和粘性上解。则

$$v(t, x) \leqslant \hat{v}(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n. \tag{2.61}$$

上面定理的证明完全包含在定理 2.4 的证明过程中。只是在得到(2.57)式时，需要用到(2.60)式。

利用定理 2.6，可以得到下面的推论。

推论 2.7 设第二章 §3 中假设 (3.6) ～(3.9)成立。则下值函数 $V^-(t, x)$ 和上值函数 $V^+(t, x)$ 分别是第二章问题(3.50)和(3.52)唯一的粘性解，且有

$$V^-(t, x) \leqslant V^+(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n. \tag{2.62}$$

进一步，当 Isaacs 条件第二章(3.54)成立时，有

$$V^-(t, x) = V^+(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n. \tag{2.63}$$

即二人零和微分对策存在值函数。

§3 存在性定理——粘性消去法

本节将用粘性消去法来证明下述方程的粘性解的存在

性。

$$\lambda v(x)-H(x,Dv(x))=0,\quad x\in \boldsymbol{R}^n. \tag{3.1}$$

这样的存在性定理与上一节中的唯一性定理结合起来使得值函数的决定完全可以化为一个偏微分方程的求解问题。

现在，先作一些假设。设 $H:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 为一个连续函数，满足下述条件：存在常数 $C_0>0$ 和 $0<L<\lambda$，使得

$$H(\cdot,0)\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n), \tag{3.2}$$

$$|H(x,p)-H(\hat{x},p)|\leqslant(L|p|+C_0)|x-\hat{x}|,\quad \forall x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n, \tag{3.3}$$

$$|H(x,p)|\leqslant C_0(1+|p|^2),\quad \forall(x,p)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n. \tag{3.4}$$

若 $H(\cdot,\cdot)$ 是由第二章 §2 中无限时区经典最优控制问题所决定的，即

$$H(x,p)=\inf_{u\in U}\{f^0(x,u)+(p,f(x,u))\},\quad (x,p)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n, \tag{3.5}$$

则当 f^0 和 f 满足下述条件时，(3.2)～(3.4)式是成立的：

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}\left|\inf_{u\in U}f^0(x,u)\right|<\infty. \tag{3.6}$$

$$\begin{cases}|f^0(x,u)-f^0(\hat{x},u)|\leqslant C_0\|x-\hat{x}\|,\\ \|f(x,u)-f(\hat{x},u)\|\leqslant L\|x-\hat{x}\|,\end{cases}\quad \forall x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n,\ u\in U, \tag{3.7}$$

$$L<\lambda \tag{3.8}$$

$$|f^0(x,u)|,\ \|f(x,u)\|\leqslant C_0,\quad \forall(x,u)\in\boldsymbol{R}^n\times U. \tag{3.9}$$

易见，条件 (3.6)～(3.9) 要比第二章 §2 中的 (H1)′ 略强。这是由于偏微分方程理论中的一些技术性条件所致。当 $H(\cdot,\cdot)\in C^1$ 时，(3.3)式蕴含第一章的(5.81)式。现暂设函数 $H(\cdot,\cdot)$ 是 C^1 的，则由第一章定理5.5知，对任何 $\varepsilon>0$ 及

$1<p<\infty$，存在 $v^\varepsilon(\cdot)\in W^{2,p}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)\cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，满足

$$-\varepsilon\Delta v^\varepsilon(x)+\lambda v^\varepsilon(x)-H(x,\ Dv^\varepsilon(x))=0,\qquad \text{a.e.}\ x\in\boldsymbol{R}^n,\tag{3.10}$$

且

$$|v^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}\leqslant\frac{1}{\lambda}|H(\cdot,\ 0)|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}.\tag{3.11}$$

现在，要说明 $v^\varepsilon(\cdot)$ 在任何 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界闭集上是有一致收敛子序列的。

引理 3.1 设 $H(\cdot,\ \cdot)\in C^1$，满足 (3.2)～(3.4)。则对任何 $\varepsilon>0$，$1<p<\infty$，存在 $v^\varepsilon(\cdot)\in W^{2,p}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)\cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，满足(3.10)、(3.11)以及

$$|Dv^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}\leqslant\frac{C_0}{\lambda-L},\quad\forall\varepsilon>0.\tag{3.12}$$

证 固定 $\xi\in\boldsymbol{R}^n$，令

$$\begin{cases}\bar{v}^\varepsilon(x)=v^\varepsilon(x+\xi),\quad\forall x\in\boldsymbol{R}^n,\\ \overline{H}(x,\ p)=H(x+\xi,\ p),\quad\forall(x,\ p)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\tag{3.13}$$

则易知

$$-\varepsilon\Delta\bar{v}^\varepsilon(x)+\lambda\bar{v}^\varepsilon(x)-\overline{H}(x,\ D\bar{v}^\varepsilon(x))=0,\qquad\text{a.e.}\ x\in\boldsymbol{R}^n.\tag{3.14}$$

定义

$$\Phi(x)=v^\varepsilon(x)-\bar{v}^\varepsilon(x),\quad x\in\boldsymbol{R}^n.\tag{3.15}$$

由于 $v^\varepsilon(\cdot)$ 和 $\bar{v}^\varepsilon(\cdot)$ 是 $L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 函数，故对任何 $\delta>0$，存在 $x_1\in\boldsymbol{R}^n$，使得

$$\Phi(x_1)\geqslant\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}\Phi(x)-\delta.\tag{3.16}$$

令 $\zeta(\cdot)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，有下述性质：

$$\begin{cases}\zeta(x_1)=1,\quad 0\leqslant\zeta(x)<1,\quad\forall x\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{x_1\},\\ |D\zeta(x)|\leqslant1,\quad|\Delta\zeta(x)|\leqslant1,\quad\forall x\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases}\tag{3.17}$$

容易知道,这样的函数是存在的。然后,作

$$\Psi(x)=\Phi(x)+2\delta\zeta(x),\ x\in R^n. \tag{3.18}$$

由于 $\zeta\in C_0^\infty(R^n)$,故可设 G 为一个有界区域,使得

$$\zeta(x)=0,\quad x\in R^n\setminus G. \tag{3.19}$$

从而,

$$\Psi(x_1)=\Phi(x_1)+2\delta\geqslant\sup_{x\in R^n}\Phi(x)+\delta>\sup_{x\in R^n\setminus G}\Phi(x). \tag{3.20}$$

因此,

$$\sup_{x\in R^n}\Psi(x)=\max_{x\in \overline{G}}\Psi(x). \tag{3.21}$$

于是,可找到 $x_0\in\overline{G}\subset R^n$,使得

$$\Psi(x_0)\geqslant\Psi(x),\quad \forall x\in R^n. \tag{3.22}$$

即 $\Psi(x)$ 在 x_0 处达到最大值。所以,有

$$\begin{cases} D\Psi(x_0)=0,\\ \Delta\Psi(x_0)\leqslant 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} D\bar{v}^\varepsilon(x_0)=Dv^\varepsilon(x_0)+2\delta D\zeta(x_0),\\ \Delta v^\varepsilon(x_0)-\Delta\bar{v}^\varepsilon(x_0)+2\delta\Delta\zeta(x_0)\leqslant 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

因此,由方程(3.10)和(3.14)知

$$\begin{aligned}
\lambda(v^\varepsilon(x_0)-\bar{v}^\varepsilon(x_0)) &= \varepsilon\Delta v^\varepsilon(x_0)+H(x_0,Dv^\varepsilon(x_0))\\
&\quad -\varepsilon\Delta\bar{v}^\varepsilon(x_0)-\overline{H}(x_0,D\bar{v}^\varepsilon(x_0))\\
&= H(x_0,Dv^\varepsilon(x_0))-\overline{H}(x_0,Dv^\varepsilon(x_0)+2\delta D\zeta(x_0))\\
&\quad -2\delta\varepsilon\Delta\zeta(x_0)\\
&\leqslant H(x_0,Dv^\varepsilon(x_0))-H(x_0+\xi,Dv^\varepsilon(x_0))\\
&\quad +H(x_0+\xi,Dv^\varepsilon(x_0))-H(x_0+\xi,Dv^\varepsilon(x_0)\\
&\quad +2\delta D\zeta(x_0))+2\delta\varepsilon\leqslant(L|Dv^\varepsilon(x_0)|+C_0)|\xi|\\
&\quad +2\delta\varepsilon+|H(x_0+\xi,Dv^\varepsilon(x_0))\\
&\quad -H(x_0+\xi,Dv^\varepsilon(x_0)+2\delta D\zeta(x_0))|.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

另一方面，由(3.22)式知，对任何$x\in\boldsymbol{R}^n$，

$$v^\varepsilon(x)-\bar{v}^\varepsilon(x)\leqslant\Psi(x)\leqslant\Psi(x_0)=v^\varepsilon(x_0)-\bar{v}^\varepsilon(x_0)+2\delta\zeta(x_0)$$

$$\leqslant\left[\frac{L}{\lambda}|Dv^\varepsilon(x_0)|+\frac{C_0}{\lambda}\right]|\xi|+\frac{2\delta_\varepsilon}{\lambda}$$

$$+\frac{1}{\lambda}|H(x_0+\xi,Dv^\varepsilon(x_0))$$

$$-H(x_0+\xi,Dv^\varepsilon(x_0)+2\delta D\zeta(x_0))|。\qquad(3.25)$$

故，令$\delta\to0$，可得

$$v^\varepsilon(x)-v^\varepsilon(x+\xi)\leqslant\left(\frac{L}{\lambda}|Dv^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}+\frac{C_0}{\lambda}\right)|\xi|。\qquad(3.26)$$

由第一章§5的结果知(参见第一章(5.85)式)，$|Dv^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}$是存在的(一般而言，它是依赖于$\varepsilon$的)。由于$\xi\in\boldsymbol{R}^n$是任意的，故知

$$|v^\varepsilon(x)-v^\varepsilon(x+\xi)|\leqslant\left[\frac{L}{\lambda}|Dv^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}+\frac{C_0}{\lambda}\right]|\xi|。\qquad(3.27)$$

从而，

$$|Dv^\varepsilon(x)|\leqslant\frac{L}{\lambda}|Dv^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}+\frac{C_0}{\lambda},\quad \text{a.e.}\,x\in\boldsymbol{R}^n。\qquad(3.28)$$

注意到$L<\lambda$，得到(3.12)式。

上面引理的意义在于估计式(3.12)关于$\varepsilon>0$是一致的。(3.12)式说明$\{v^\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon>0}$在$W^{1,\infty}(\boldsymbol{R}^n)$中是有界的。于是，对任何的$R>0$，由于$W^{1,\infty}(\bar{B}_R)\hookrightarrow C^\alpha(\bar{B}_R)$ $(0<\alpha<1)$是紧嵌入，故知存在$\{v^\varepsilon(\cdot)\}$的一个子序列(仍记作它本身)以及一个$v(\cdot)\in W^{1,\infty}(\bar{B}_R)$，使得

$$v^\varepsilon(x)\to v(x),\ (\varepsilon\to0)\ 关于x\in\bar{B}_R一致。\qquad(3.29)$$

利用对角线原理，设

$$v^{\varepsilon}(x) \to v(x), \text{ 关于 } x \text{ 在任何紧集上一致.} \tag{3.30}$$

由于对任何 $1<p<\infty$，$v^{\varepsilon}(\cdot)\in W^{2,p}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$，故知 $Dv^{\varepsilon}(\cdot)$ 是 Hölder 连续的(据 Sobolev 嵌入定理)。从而，由(3.10)式可见(利用第一章定理 5.2) $v^{\varepsilon}(\cdot)$ 是 C^2 的。因此，由定理 1.12 可知，$v(\cdot)$ 是 (3.1) 的一个粘性解。再由上节中的唯一性定理可知，这样的粘性解是唯一的。从而，整个序列 $\{v^{\varepsilon}(\cdot)\}$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 的任何紧子集上是一致收敛的。这样，证明了方程(3.1)在 H 是 C^1 时，粘性解是存在的。

再来看一般情况。设 $H: \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 是连续的，满足(3.2)～(3.4)。取 $w(\cdot)\in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$，

$$\begin{cases} w(x)=1, & |x|\leqslant 1, \\ w(x)=0, & |x|\geqslant 2. \end{cases} \tag{3.31}$$

然后，令

$$\overline{H}_k(x, p)=w(p/k)H(x, p), \quad \forall (x, p)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n, k\geqslant 1. \tag{3.32}$$

易见，$\overline{H}_k(x, p)$ 是有界的，且

$$\lim_{k\to\infty}\overline{H}_k(x, p)=H(x, p), \text{ 关于}(x, p)\text{在有界集上一致.} \tag{3.33}$$

可找到 $H_k(\cdot, \cdot)\in C_b^2(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)\equiv\{f: \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R} \mid f$ 具有二阶有界连续导数，且 f 本身也有界$\}$，使得

$$\|H_k(\cdot, \cdot)-\overline{H}_k(\cdot, \cdot)\|_{L^{\infty}(R^{2n})}\leqslant\frac{1}{k}, \quad k\geqslant 1. \tag{3.34}$$

注意(3.2)～(3.4)，

$$\|H_k(\cdot, 0)\|_{L^{\infty}(R^n)}\leqslant\|H(\cdot, 0)\|_{L^{\infty}(R^n)}+1, \quad \forall k\geqslant 1, \tag{3.35}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}H_k(x, p)\right\|\leqslant L\|p\|+C_0, \quad \forall k\geqslant 1, \tag{3.36}$$

$$|H_k(x,\ p)|\leqslant(C_0+1)(1+\|p\|^2),$$
$$\forall(x,\ p)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n,\ k\geqslant 1. \tag{3.37}$$

从而，由上面所证，知下述方程存在唯一的粘性解 $v_k(\cdot)$。

$$\lambda v_k(x)-H_k(x,Dv_k(x))=0,\quad x\in\boldsymbol{R}^n, \tag{3.38}$$

且

$$\|Dv_k(\cdot)\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)}\leqslant\frac{C_0+1}{\lambda-L},\ \forall k\geqslant 1. \tag{3.39}$$

因此，由 Sobolev 嵌入定理知，对任何 $R>0$，$\{v_k(\cdot)\}_{k\geqslant 1}$ 在 $C^\alpha(\bar{B}_R)$ 中有界($0<\alpha<1$)。从而，可以取到一致收敛的子序列，再用对角线原理，可设

$$v_k(x)\to v(x),\ 关于\ x\ 在任何紧集上一致。 \tag{3.40}$$

因此，由命题 1.11 知，$v(\cdot)$ 是(3.1)的一个粘性解。再利用唯一性定理，得知整个序列 $\{v_k(\cdot)\}$ 是收敛的。这样，便完成了下述存在性定理的证明：

定理 3.2 设 $H:\ \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 是连续的。设 (3.2)～(3.4)成立。则(3.1)存在粘性解。

对于依赖于时间的 HJB 方程，也有类似的结果。限于篇幅，这里就不详述了。

§4 最优转换与脉冲控制问题的处理

本节将讨论由最优转换或最优脉冲控制问题所导出的 HJB 方程的粘性解。我们将用方程的唯一的粘性解来刻画相应问题的值函数。

首先，考察无限时区最优转换问题。我们沿用第二章 §4 中的记号。由第二章定理 4.3 知，当值函数

$$v(\cdot)\equiv(v^1(\cdot),\ v^2(\cdot),\ \cdots,\ v^m(\cdot))\in C^1(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{R}^m)$$

时，它满足

$$\max\{\lambda v^d(x)-(Dv^d(x),\ f(x,\ d))-f^0(x,\ d),$$
$$v^d(x)-M^d[v](x)\}=0,\quad (x,\ d)\in \boldsymbol{R}^n\times\Lambda. \tag{4.1}$$

其中，

$$M^d[v](x)=\min_{\bar{d}\in\Lambda,\bar{d}\neq d}\{v^{\bar{d}}(x)+k(d,\ \bar{d})\},$$
$$(x,\ d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda. \tag{4.2}$$

一般而言，$v(\cdot)$ 不是 C^1 的，故必须得说明在什么意义下 $v(\cdot)$ 满足(4.1)式。这样，需要引入下述的定义。

定义 4.1 连续函数 $v(\cdot)\equiv(v^1(\cdot),\cdots,\ v^m(\cdot)):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ 称为是 (4.1) 的一个粘性下解，如果对任何的 $\varphi(\cdot)\in C^1(\boldsymbol{R})$，只要对某个 $d\in\Lambda$，$v^d(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在某一点 x_0 达到局部极大值，则必有

$$\max\{\lambda v^d(x_0)-(D\varphi(x_0),\ f(x_0,\ d))-f^0(x_0,\ d),$$
$$v^d(x_0)-M^d[v](x_0)\}\leqslant 0 \tag{4.3}$$

若上述定义中极大换成极小，(4.3)式中“$\leqslant$”换成“$\geqslant$”，则称 $v(\cdot)$ 为(4.1)的一个粘性上解。当 $v(\cdot)$ 同时是(4.1) 的粘性下解和粘性上解时，称之为(4.1)的一个粘性解。

先给出下面结果。它很类似于§1 中的有关结论。

命题 4.2 无限时区最优转换控制问题的值函数 $v(\cdot)$是(4.1)的一个粘性解。

证 设 $\varphi(\cdot)\in C^1(\boldsymbol{R})$，使得对某个 $d\in\Lambda$，$v^d(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 x_0 处达到局部极大值。则易知，当 $t>0$ 充分小时，$\forall d(\cdot)\in\mathscr{S}^d$，

$$v^d(x_0)-\varphi(x_0)\geqslant v^d(y_{x_0}(t))-\varphi(y_{x_0}(t)). \tag{4.4}$$

于是，由第二章定理 4.2 知，对该固定的 d，

$$0\leqslant\int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau),\ d)e^{-\lambda\tau}d\tau+v^d(y_{x_0}(t))e^{-\lambda t}-v^d(x_0)$$

$$\leqslant \int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), d) e^{-\lambda\tau} d\tau + (\varphi(y_{x_0}(t)) - \varphi(x_0)) e^{-\lambda t}$$

$$+ v^d(x_0)(e^{-\lambda t} - 1)。\tag{4.5}$$

因此，在上式两边除以 t，再令 $t \to 0^+$，可得

$$0 \leqslant f^0(x_0, d) + (D\varphi(x_0), f(x_0, d)) - \lambda v^d(x_0)。\tag{4.6}$$

从而，注意到第二章(4.19)式，得到

$$\max\{\lambda v^d(x_0) - (D\varphi(x_0), f(x_0, d)) - f^0(x_0, d),$$

$$v^d(x_0) - M^d[v](x_0)\} \leqslant 0 \tag{4.7}$$

故，$v(\cdot)$ 是(4.1)式的一个粘性下解。今再设 $\varphi(\cdot) \in C^1(\boldsymbol{R})$，使得对某个 $d \in \Lambda$，$v^d(\cdot) - \varphi(\cdot)$ 在 x_0 处达到局部极小值。则当 $t > 0$ 充分小时，对任何 $d(\cdot) \in \mathscr{S}^d$，都有

$$v^d(x_0) - \varphi(x_0) \leqslant v^d(y_{x_0}(t)) - \varphi(y_{x_0}(t))。\tag{4.8}$$

今若有

$$v^d(x_0) = M^d[v](x_0), \tag{4.9}$$

则必有

$$\max\{\lambda v^d(x_0) - (D\varphi(x_0), f(x_0, d)) - f^0(x_0, d),$$

$$v^d(x_0) - M^d[v](x_0)\} \geqslant 0。\tag{4.10}$$

这正是要证的。今设

$$v^d(x_0) < M^d[v](x_0), \tag{4.11}$$

则由第二章定理 4.2 知存在 $t_0 > 0$ 充分小，使得

$$v^d(x_0) = \int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), d) e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau + v^d(y_{x_0}(t)) e^{-\lambda t},$$

$$\forall t \in [0, t_0] \tag{4.12}$$

因此，由(4.8)式可得

$$0 = \int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), d) e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau + v^d(y_{x_0}(t)) e^{-\lambda t} - v^d(x_0)$$

$$\geqslant \int_0^t f^0(y_{x_0}(\tau), d) e^{-\lambda\tau} \mathrm{d}\tau + (\varphi(y_{x_0}(t))$$

$$- \varphi(x_0)) e^{-\lambda t} + (e^{-\lambda t} - 1) v^d(x_0)。\tag{4.13}$$

两边除以 t，再令 $t\to 0^+$，得到

$$0\geqslant f^0(x_0, d)+(D\varphi(x_0), f(x_0, d))-\lambda v^d(x_0). \quad (4.14)$$

因此，仍有(4.10)式。故知 $v(\cdot)$ 为(4.1)式的一个粘性解。

下面，讨论(4.1)的粘性解的唯一性。类似于 §2，更一般地讨论下述方程：

$$\max\{\lambda v^d(x)-H^d(x, Dv^d(x)), v^d(x)-M^d[v](x)\}=0,$$
$$(x, d)\in \boldsymbol{R}^n\times \Lambda. \quad (4.15)$$

类似于定义 4.1，不难给出(4.15)式的粘性解的定义。此处，对 $H^d: \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 作如下假设：存在常数 $A, B\geqslant 0$，以及连续函数 $\omega: \boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$\omega$ 关于它的每个变量均单调增加，且 $\omega(r, 0)=0, \forall r\geqslant 0$，使得

$$|H^d(x, p)-H^d(x, q)|\leqslant(A\|x\|+B)\|p-q\|,$$
$$\forall x, p, q\in\boldsymbol{R}^n, d\in\Lambda. \quad (4.16)$$

$$|H^d(x, p)-H^d(y, p)|\leqslant\omega(\|x\|\vee\|y\|, \|x-y\|(1+\|p\|)),$$
$$\forall x, y, p\in\boldsymbol{R}^n, d\in\Lambda. \quad (4.17)$$

不难看出，当第二章的(4.1)～(4.4)式成立时，对相应的函数 $H^d(\cdot,\cdot)$，上述条件是满足的。此时，$A=L_0$，$B=L$，而第二章的(4.7)式变为

$$\lambda>A(r+\delta). \quad (4.18)$$

由第二章命题 4.1 中的结论，仍有

$$|v^d(x)|\leqslant C(1+\|x\|^{r+\delta}), \quad \forall x\in\boldsymbol{R}^n, d\in\Lambda. \quad (4.19)$$

类似于 §2，引进下述函数类

$$Q_\sigma(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)\equiv\left\{u(\cdot)\in C(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m): \sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}\frac{\|u(x)\|}{1+\|x\|^\sigma}<\infty\right\}. \quad (4.20)$$

由(4.18)和(4.19)式可知

$$v(\cdot)\in Q_{r+\delta}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)\subset\bigcap_{\sigma<\lambda/A}Q_\sigma(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m). \quad (4.21)$$

定理 4.3 设(4.16)、(4.17)式和第二章(4.5)、(4.6)式成立。设 $v(\cdot), \hat{v}(\cdot) \in \bigcup_{\sigma<\lambda/A} Q_\sigma(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ 为(4.1)的两个粘性解。则 $v(\cdot)=\hat{v}(\cdot)$。

首先证明下述的引理。

引理 4.4 设 $v(\cdot)$ 为(4.1)的一个粘性解，则

$$v^d(x) \leqslant M^d[v](x), \quad \forall (x, d) \in \boldsymbol{R}^n \times \Lambda. \tag{4.22}$$

证 用反证法。设(4.22)不对，则可找到 $(x_0, d) \in \boldsymbol{R}^n \times \Lambda$，使得

$$v^d(x_0) > M^d[v](x_0). \tag{4.23}$$

由 $v(\cdot)$ 及 $M^d[\cdot]$ 的连续性，知道存在 $\delta_0>0$，使得

$$v^d(x) \geqslant M^d[v](x) + \delta_0, \quad \forall \|x-x_0\| \leqslant \delta_0. \tag{4.24}$$

令

$$R > \max_{\|x-x_0\|\leqslant\delta_0} \|v(x)\|. \tag{4.25}$$

定义

$$\Phi^d(x) = v^d(x) + 2R\zeta(x-x_0), \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{4.26}$$

其中，$\zeta(\cdot) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$。满足

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\zeta \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n; \|x\| \leqslant \delta_0\}, \\ 0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n, \\ \zeta(0)=1, 0 \leqslant \zeta(x) < 1, \forall x \neq 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

对于任何 $\|x-x_0\|=\delta_0$，有

$$\Phi^d(x) = v^d(x) < R \leqslant \Phi^d(x_0). \tag{4.28}$$

因此，存在 $x_1 \in \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x-x_0\| < \delta_0\}$，使得 $\Phi^d(\cdot)$ 在 x_1 处取到一个局部极大值，也即 $v^d(\cdot) - 2R\zeta(\cdot - x_0)$ 在 x_1 处取到局部极大。由粘性解的定义，可得

$$\max\{\lambda v^d(x_1) - H^d(x_1, 2RD\zeta(x_1-x_0)), v^d(x_1) - M^d[v](x_1)\} \leqslant 0. \tag{4.29}$$

因此，必有

$$v^{d}(x_1)\leqslant M^{d}[v](x_1). \tag{4.30}$$

但 $\|x_1-x_0\|<\delta_0$，故上式与(4.24)式矛盾。引理得证。

现在，证明定理 4.3。

定理 4.3 的证明 不妨设 $\lambda=1$。定义

$$\Phi^{d}(x,y)=v^{d}(x)-\hat{v}^{d}(y)-\frac{1}{\varepsilon}\|x-y\|^2-\alpha(\langle x\rangle^{\sigma}+\langle y\rangle^{\sigma}),$$

$$d\in\Lambda,\quad x,y\in\boldsymbol{R}^n. \tag{4.31}$$

此处，$\varepsilon,\alpha>0$，$\sigma<1/A$，使得 $v(\cdot),\hat{v}(\cdot)\in\bigcup_{\mu<\sigma}Q_{\mu}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$。

则易见，

$$\lim_{\|x\|,\|y\|\to\infty}\Phi^{d}(x,y)=-\infty,\quad \forall d\in\Lambda. \tag{4.32}$$

因此，存在 $(x_0,y_0)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$，使得

$$\max_{d\in\Lambda}\Phi^{d}(x_0,y_0)=\sup_{x,y\in R^n}\max_{d\in\Lambda}\Phi^{d}(x,y). \tag{4.33}$$

设 $d_0\in\Lambda$，使得

$$\Phi^{d_0}(x_0,y_0)=\max_{d\in\Lambda}\Phi^{d}(x_0,y_0). \tag{4.34}$$

假如有

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)=M^{d_0}[\hat{v}](y_0)=\min_{d\neq d_0}\{\hat{v}^{d}(y_0)+k(d_0,d_0)\},$$

$$\tag{4.35}$$

则存在 $d_1\in\Lambda$，$d_1\neq d_0$，使得

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)=\hat{v}^{d_1}(y_0)+k(d_0,d_1). \tag{4.36}$$

此时，必有

$$\hat{v}^{d_1}(y_0)<M^{d_1}[\hat{v}](y_0). \tag{4.37}$$

事实上，若(4.37)式不成立，则另有 $d_2\in\Lambda$，$d_2\neq d_1$，使得

$$\hat{v}^{d_1}(y_0)=\hat{v}^{d_2}(y_0)+k(d_1,d_2). \tag{4.38}$$

于是，由第二章(4.5)式以及(4.36)和(4.38)式知

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)=\hat{v}^{d_1}(y_0)+k(d_0,d_1)+k(d_1,d_2)$$
$$>\hat{v}^{d_1}(y_0)+k(d_0,d_2)\geqslant M^{d_0}[\hat{v}](y_0). \qquad (4.39)$$

这与引理4.4矛盾。因此,(4.37)式成立。另一方面,有

$$\Phi^{d_0}(x_0,y_0)=v^{d_0}(x_0)-\hat{v}^{d_0}(y_0)-\frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2$$
$$-\alpha(\langle x_0\rangle^\sigma+\langle y_0\rangle^\sigma)=v^{d_0}(x_0)-k(d_0,d_1)-\hat{v}^{d_1}(y_0)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2-\alpha(\langle x_0\rangle^\sigma+\langle y_0\rangle^\sigma)$$
$$\leqslant v^{d_1}(x_0)-\hat{v}^{d_1}(y_0)-\frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2-\alpha(\langle x_0\rangle^\sigma+\langle y_0\rangle^\sigma)$$
$$=\Phi^{d_1}(x_0,y_0). \qquad (4.40)$$

因此,由 d_0 的定义知(见(4.34)式)

$$\Phi^{d_1}(x_0,y_0)=\max_{d\in\Lambda}\Phi^d(x_0,y_0). \qquad (4.41)$$

不失一般性,总可假设 $d_0\in\Lambda$,使得

$$\begin{cases}\Phi^{d_0}(x_0,y_0)=\max\limits_{d\in\Lambda}\sup\limits_{x,y\in R^n}\Phi^d(x,y),\\ \hat{v}^{d_0}(y_0)<M^{d_0}[\hat{v}](y_0).\end{cases} \qquad (4.42)$$

这里 (d_0,x_0,y_0) 是依赖于 ε 和 α 的。类似于§2,可证

$$\frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2=o(1), \quad (\varepsilon\to 0), \qquad (4.43)$$

再利用粘性解的定义,可得(注意 $\lambda=1$)

$$\max\Big\{v^{d_0}(x_0)-H^{d_0}\Big(x_0,\frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)+\alpha\sigma\langle x_0\rangle^{\sigma-2}x_0\Big),$$
$$v^{d_0}(x_0)-M^{d_0}[v](x_0)\Big\}\leqslant 0, \qquad (4.44)$$

$$\max\Big\{\hat{v}^{d_0}(y_0)-H^{d_0}\Big(y_0,\frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)-\alpha\sigma\langle y_0\rangle^{\sigma-2}y_0\Big),$$
$$\hat{v}^{d_0}(y_0)-M^{d_0}[\hat{v}](y_0)\Big\}\geqslant 0, \qquad (4.45)$$

由(4.44)式,恒有

$$v^{d_0}(x_0)\leqslant H^{d_0}\left(x_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)+\alpha\sigma\langle x_0\rangle^{\sigma-2}x_0\right). \quad (4.46)$$

而由(4.42)式中的第二式及(4.45)式，可知

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)\geqslant H^{d_0}\left(y_0,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_0-y_0)-\alpha\sigma\langle y_0\rangle^{\sigma-2}y_0\right). \quad (4.47)$$

然后，类似于§2，可证得

$$v^d(x)\leqslant\hat{v}^d(x),\quad \forall(x,\ d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda. \quad (4.48)$$

由于 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 的地位是对称的，定理得证。

从上面的证明来看，关键是得到(4.42)。而在得到它的过程中，第二章(4.5)式起到了关键的作用。容易知道，该条件可以略微放松一点，即该条件可由下述的条件来代替：$\forall\{d_i\}_{i=1}^{j}$，$d_1=d_j$，均有

$$\sum_{i=1}^{j-1}k(d_i,\ d_{i+1})>0. \quad (4.49)$$

且 $\forall d,\ \tilde{d},\ \hat{d}\in\Lambda$，

$$k(d,\ \tilde{d})\leqslant k(d,\ \hat{d})+k(\hat{d},\ \tilde{d}). \quad (4.50)$$

由上面的结果，立即可得下述的推论。

推论 4.5 设第二章的(4.1)～(4.7)成立。则无限时区最优转换控制问题的值函数 $v(\cdot)$ 是(4.1)的唯一的粘性解。

对于有限时区的最优转换控制问题，也可以得到类似结果。由于思路类似，在此就不详述了。

下面，讨论有限时区最优脉冲控制问题。

沿用第二章§5中的记号。由第二章定理5.4知，当相应的值函数 $v(\cdot)$ 是 C^1 时，它满足下述方程及终值条件：

$$\begin{cases}\min\{v_t(t,\ x)+(v_x(t,\ x),\ f(t,\ x))+f^0(t,\ x),\\ \quad N[v](t,\ x)-v(t,\ x)\}=0,\ (t,\ x)\in[0,\ T)\times\boldsymbol{R}^n,\\ v(T,\ x)=h(x),\quad x\in\boldsymbol{R}^n.\end{cases} \quad (4.51)$$

在第二章§5中，已经指出，一般而言，$v(\cdot,\cdot)$不是C^1的。因此，类似于关于最优转换问题以及经典最优控制问题，将说明$v(\cdot,\cdot)$是(4.51)的一个粘性解，然后再证明(4.51)的粘性解的唯一性，从而得到值函数的刻画。

首先，引进下述的定义。

定义 4.6 连续函数 $v(\cdot,\cdot)$: $[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 称为是(4.51)的一个粘性下解，如果 $v(T,x)=h(x)$, $\forall x\in\boldsymbol{R}^n$，且对任何 $\varphi(\cdot,\cdot)\in C^1([0,T]\times\boldsymbol{R}^n)$，只要 $v(\cdot,\cdot)-\varphi(\cdot,\cdot)$ 在 $(t_0,x_0)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$ 处达到局部极大值，则有

$$\begin{aligned}&\min\{\varphi_t(t_0,x_0)+(\varphi_x(t_0,x_0),f(t_0,x_0))\\&\quad+f^0(t_0,x_0),N[v](t_0,x_0)-v(t_0,x_0)\}\geqslant 0.\end{aligned}\tag{4.52}$$

类似地，将极大改为极小，“$\geqslant 0$”改为“$\leqslant 0$”，得到粘性上解的定义。而当$v(\cdot,\cdot)$同时为(4.51)的粘性下解和粘性上解时，称之为(4.51)的一个粘性解。

注意到定义4.6与定义1.13的相似之处。现在，先证明下面的命题。

命题 4.7 有限时区最优脉冲控制问题的值函数$v(\cdot,\cdot)$是(4.51)式的一个粘性解。

证 容易知道，对于值函数$v(\cdot,\cdot)$，它是满足终值条件的。今设$\varphi(\cdot,\cdot)\in C^1([0,T]\times\boldsymbol{R}^n)$，使得$v(\cdot,\cdot)-\varphi(\cdot,\cdot)$在某点$(t_0,x_0)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$达到局部极大。则对$t-t_0>0$充分小，

$$v(t_0,x_0)-\varphi(t_0,x_0)\geqslant v(t,y_{t_0,x_0}(t))-\varphi(t,y_{t_0,x_0}(t)).\tag{4.53}$$

此处，$y_{t_0,x_0}(\cdot)$是原系统对应于无脉冲控制的轨线。于是，由第二章的(5.49)式知

$$0\leqslant\int_{t_0}^{t} f^0(\tau, y_{t_0,x_0}(\tau))\mathrm{d}\tau+v(t, y_{t_0,x_0}(t))-v(t_0, x_0)$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t} f^0(\tau, y_{t_0,x_0}(\tau))\mathrm{d}\tau+\varphi(t, y_{t_0,x_0}(t))-\varphi(t_0, x_0). \tag{4.54}$$

两边除以 $t-t_0$，再令 $t\to t_0+0$，得到

$$0\leqslant f^0(t_0, x_0)+\varphi_t(t_0, x_0)+(\varphi_x(t_0, x_0), f(t_0, x_0)). \tag{4.55}$$

因此，结合第二章(5.48)式知，$v(\cdot, \cdot)$ 是 (4.51)的一个粘性下解。今再设 $\varphi(\cdot, \cdot)\in C^1([0, T]\times\boldsymbol{R}^n)$，使得 $v(\cdot, \cdot)-\varphi(\cdot, \cdot)$ 在某点 $(t_0, x_0)\in[0, T)\times\boldsymbol{R}^n$ 取到局部极小。则对 $t-t_0>0$ 充分小，有

$$v(t_0, x_0)-\varphi(t_0, x_0)\leqslant v(t, y_{t_0,x_0}(t))-\varphi(t, y_{t_0,x_0}(t)), \tag{4.56}$$

此处，$y_{t_0,x_0}(\cdot)$ 仍为对应于无脉冲控制的原系统的轨线。今若有(注意第二章(5.48)式)

$$v(t_0, x_0)=N[v](t_0, x_0), \tag{4.57}$$

则当然有

$$\min\{\varphi_t(t_0, x_0)+(\varphi_x(t_0, x_0), f(t_0, x_0))$$
$$+f^0(t_0, x_0), N[v](t_0, x_0)-v(t_0, x_0)\}\leqslant 0. \tag{4.58}$$

若有

$$v(t_0, x_0)<N[v](t_0, x_0), \tag{4.59}$$

则由第二章定理 5.3 知，存在 $\bar{t}\in(t_0, T]$，使得

$$v(t_0, x_0)=\int_{t_0}^{t} f^0(\tau, y_{t_0,x_0}(\tau))\mathrm{d}\tau+v(t, y_{t_0,x_0}(t)),$$
$$t\in[t_0, \bar{t}]. \tag{4.60}$$

因此，由(4.56)式知

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{t} f^0(\tau, y_{t_0,x_0}(\tau))\mathrm{d}\tau + v(t, y_{t_0,x_0}(t)) - v(t_0, x_0) \\
&\geqslant \int_{t_0}^{t} f^0(\tau, y_{t_0,x_0}(\tau))\mathrm{d}\tau + \varphi(t, y_{t_0,x_0}(t)) - \varphi(t_0, x_0),
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

从而,可得

$$
0 \geqslant f^0(t_0, x_0) + \varphi_t(t_0, x_0) + (\varphi_x(t_0, x_0), f(t_0, x_0)). \tag{4.62}
$$

因此，总有(4.58)式。故得知 $v(\cdot, \cdot)$ 也是(4.51)的一个粘性上解。从而,命题得证。

现在,转入唯一性的研究。类似于前面的讨论,考虑略微一般的情形:

$$
\begin{cases}
\min\{v_t(t, x) + H(t, x, v_x(t, x)), N[v](t, x) \\
\quad - v(t, x)\} = 0, \quad (t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n, \\
v(T, x) = h(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^n.
\end{cases} \tag{4.63}
$$

其中,

$$
N[v](t, x) = \inf_{\xi \in K} \{v(t, x + \xi) + l(t, \xi)\},
$$
$$
(t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n. \tag{4.64}
$$

类似于定义 4.6, 可以给出 (4.63) 的粘性解的定义。对于函数 H: $[0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, 假设它是连续的，且存在常数 $L \geqslant 0$ 以及单调增加连续函数 $\omega: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, $\omega(0) = 0$, 使得

$$
\begin{aligned}
&|H(t, x, p) - H(t, y, q)| \leqslant L\|x - y\| \\
&\quad + \omega((1 + \|p\| \vee \|q\|)\|x - y\|), \\
&\quad \forall t \in [0, T], x, y, p, q \in \boldsymbol{R}^n.
\end{aligned} \tag{4.65}
$$

需要指出的是,若按下述方式定义 H:

$$
H(t, x, p) = (p, f(t, x)) + f^0(t, x),
$$
$$
(t, x, p) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n. \tag{4.66}
$$

则我们需要比第二章 §5 中更强的条件来保证 (4.65) 式。事实上，需要下述条件：

$$\begin{cases} \|f(t,x)-f(t,\hat{x})\| \leqslant L\|x-\hat{x}\|, \\ |f^0(t,x)-f^0(t,\hat{x})|,\ |h(x)-h(\hat{x})| \leqslant \omega(\|x-\hat{x}\|), \\ \|f(t,x)\|,\ |f^0(t,x)|,\ |h(x)| \leqslant L. \end{cases} \tag{4.67}$$

这里的 $\omega(\cdot)$ 未必与(4.65)式中的 $\omega(\cdot)$ 一致。另外，对 $h(\cdot)$ 也已作了更强的假设，这与(4.65)式无关，只是为了以后的方便，利用第二章 §5 中的方法，可以证明当(4.67)式成立时，相应的值函数 $v(\cdot,\cdot)$满足下述条件：

$$\begin{cases} |v(t,x)| \leqslant C, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n, \\ |v(t,x)-v(\hat{t},\hat{x})| \leqslant \bar{\omega}(|t-\hat{t}|+\|x-\hat{x}\|), \\ \quad \forall t,\hat{t} \in [0,T],\ x,\hat{x} \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{4.68}$$

此处，$C>0$ 为一常数，$\bar{\omega}: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 为一个单调增加的连续函数，$\bar{\omega}(0)=0$。

先给出下面的引理。

引理 4.8 设 $v(\cdot,\cdot)$ 为(4.63)的一个粘性解，则

$$v(t,x) \leqslant N[v](t,x), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n. \tag{4.69}$$

证 用反证法。设在某点 $(t_0,x_0) \in [0,T) \times \mathbf{R}^n$，使得

$$v(t_0,x_0) > N[v](t_0,x_0). \tag{4.70}$$

则存在 $\delta_0>0$，使得

$$v(t,x) \geqslant N[v](t,x)+\delta_0, \quad \forall |t-t_0|+\|x-x_0\|<\delta_0. \tag{4.71}$$

不妨设 $t_0+\delta_0<T$。容易知道，可找到 $\zeta \in C^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^n)$，使得

$$
\begin{cases}
\zeta(t_0, x_0)=1, \\
0\leqslant\zeta(t, x)<1, \forall(t, x)\in[0, T]\times \boldsymbol{R}^n, (t, x)\neq(t_0, x_0), \\
\zeta(t, x)=0, \forall(t, x)\in[0, T]\times\boldsymbol{R}^n, |t-t_0|+\|x-x_0\|\geqslant\delta_0.
\end{cases}
\tag{4.72}
$$

再令

$$
R>\max_{|t-t_0|+\|x-x_0\|\leqslant\delta_0}|v(t, x)|. \tag{4.73}
$$

定义

$$
\Phi(t, x)=v(t, x)+2R\zeta(t, x), \quad (t, x)\in[0, T]\times\boldsymbol{R}^n. \tag{4.74}
$$

则对任何 $(t, x)\in[0, T]\times\boldsymbol{R}^n$，满足 $|t-t_0|+\|x-x_0\|=\delta_0$，有

$$
\Phi(t, x)=v(t, x)<R\leqslant v(t_0, x_0)+2R=\Phi(t_0, x_0). \tag{4.75}
$$

因此，可以找到 (t_1, x_1)，满足 $|t_1-t_0|+\|x_1-x_0\|<\delta_0$，使得

$$
\Phi(t_1, x_1)\geqslant\max_{|t-t_0|+\|x-x_0\|}v(t, x). \tag{4.76}
$$

由粘性解的定义

$$
\begin{aligned}
&\min\{2R\zeta_t(t_1, x_1)+H(t_1, x_1, 2R\zeta_x(t_1, x_1)), \\
&N[v](t_1, x_1)-v(t_1, x_1)\}\geqslant0.
\end{aligned} \tag{4.77}
$$

因此，

$$
v(t_1, x_1)\leqslant N[v](t_1, x_1). \tag{4.78}
$$

这与(4.71)式矛盾，因为 $|t_1-t_0|+\|x_1-x_0\|<\delta_0$。从而得证(4.69)式。

引理 4.8 的证明非常相似于引理 4.4 的证明。下面将叙述并证明方程(4.63)粘性解的唯一性定理。

定理 4.9 设(4.65)式、第二章的 (5.13)～(5.16) 式成立。设 $h(\cdot)\in C(\boldsymbol{R}^n)$，设 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 为两个一致连续一致

有界的(4.63)的粘性解，则必有 $v(\cdot)=\hat{v}(\cdot)$。

为证明这个定理，先证明下述引理。

引理 4.10 存在一个固定常数(依赖于 $\hat{v}(\cdot)$ 的一致连续性) $\sigma>0$，使得只要

$$\hat{v}(t, x)=N[\hat{v}](t, x)=\hat{v}(t, x+\xi)+l(t, \xi), \tag{4.79}$$

必成立着

$$\hat{v}(s, y)<N[\hat{v}](s, y), \quad \|y-x-\xi\|, \ |t-s|\leqslant\sigma. \tag{4.80}$$

证 设(4.79)式成立。则有

$$\begin{aligned}&\hat{v}(t, x+\xi+\zeta)+l(t, \zeta)-\hat{v}(t, x+\xi)=\hat{v}(t, x+\xi+\zeta)\\&+l(t,\zeta)+l(t,\xi)-\hat{v}(t,x)\geqslant l(t,\zeta)+l(t,\xi)-l(t,\xi+\zeta).\end{aligned} \tag{4.81}$$

由于 $\hat{v}(\cdot, \cdot)$ 是一致有界的，故由

$$\hat{v}(t, x)\leqslant N[\hat{v}](t, x)\leqslant\hat{v}(t, x)+l(t, 0). \tag{4.82}$$

知，$N[\hat{v}](t, x)$ 也是一致有界的。从而，由第二章(5.16)式知，存在常数 $r>0$ (不依赖于 $(t, x)\in[0, T]\times\boldsymbol{R}^n$)，使得

$$N[\hat{v}](t, x)=\inf_{\xi\in K, \|\xi\|\leqslant r}[\hat{v}(t, x+\xi)+l(t, \xi)], \quad \forall(t, x)\in[0, T]\times\boldsymbol{R}^n. \tag{4.83}$$

因此，由第二章(5.13)式和(4.79)式知

$$\begin{aligned}&N[\hat{v}](t, x+\xi)-\hat{v}(t, x+\xi)\\&=\inf_{\zeta\in K, \|\zeta\|\leqslant r}[\hat{v}(t, x+\xi+\zeta)+l(t, \zeta)]-\hat{v}(t, x)+l(t, \xi)\\&\geqslant\inf_{\zeta\in K, \|\zeta\|\leqslant r}[l(t, \xi)+l(t, \zeta)-l(t, \xi+\zeta)]\\&\geqslant\inf_{\xi, \zeta\in K, \|\xi\|, \|\zeta\|\leqslant r}[l(t, \xi)+l(\zeta)-l(t, \xi+\zeta)]\geqslant\bar{l}>0.\end{aligned} \tag{4.84}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}&|N[\hat{v}](t, x+\xi)-N[\hat{v}](t, y)|\\&\leqslant|\hat{v}(t, x+\xi)-\hat{v}(t, y)|.\end{aligned} \tag{4.85}$$

因此，可以找到仅仅依赖于 $\hat{v}$ 的一致连续性及一致有界性的常数 $\sigma>0$，使得

$$N[\hat{v}](s, y)-\hat{v}(s, y)\geqslant\frac{\bar{l}}{2},$$

$$\forall|t-s|, \|x+\xi-y\|\leqslant\sigma. \tag{4.86}$$

这就证得了(4.80)式。

下面，来证明定理 4.9。

定理 4.9 的证明 用反证法。若

$$\sup_{[T-T_0, T]\times\boldsymbol{R}^n}[v(t, x)-\hat{v}(t-x)]>0. \tag{4.87}$$

不妨设 $T_0<T$，使得 $T_0<\sigma$，此处的 σ 即为引理 4.10 中给出的 σ。则必存在一个 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$，使得

$$\sup_{\mathcal{O}(x_0)}[v(t, x)-\hat{v}(t, x)]>0, \tag{4.88}$$

$$\hat{v}(t, x)<N[\hat{v}](t, x), \quad \forall(t, x)\in\mathcal{O}(x_0), \tag{4.89}$$

其中，

$$\mathcal{O}(x_0)=\{(t, x)\in(T-T_0, T)\times\boldsymbol{R}^n \mid \|x-x_0\|$$

$$<L(t-T+T_0)\}. \tag{4.90}$$

事实上，总可找到 $\bar{x}_0\in\boldsymbol{R}^n$，使得

$$\sup_{[T-T_0, T]}[v(t, \bar{x}_0)-\hat{v}(t, \bar{x}_0)]>0. \tag{4.91}$$

若取此 $\bar{x}_0$ 为 x_0 使得(4.88)、(4.89)式成立，则已完成证明。否则，不妨假设对某个 $t_0\in(T-T_0, T)$，$\xi_0\in K$，

$$\hat{v}(t_0, \bar{x}_0)=N[\hat{v}](t_0, \bar{x}_0)=\hat{v}(t_0, \bar{x}_0+\xi_0)+\bar{l}(t_0, \xi_0). \tag{4.92}$$

则由引理 4.10 知，

$$\hat{v}(t, x)<N[\hat{v}](t, x), \quad \forall|t-t_0|, \|x-\bar{x}_0-\xi_0\|\leqslant\sigma. \tag{4.93}$$

总可选取 T_0 充分小，此时，将有

$$\mathcal{O}(\bar{x}_0+\xi_0)\subset\{(t, x)\in[T-T_0, T]\times\boldsymbol{R}^n \mid |t-t_0|,$$

$$\|x-\hat{x}_0-\xi_0\|\leqslant\sigma\}. \tag{4.94}$$

于是，可取 $x_0=\bar{x}_0+\xi_0$。而此时，

$$
\begin{aligned}
& v(t_0, x_0)-\hat{v}(t_0, x_0)=v(t_0, \bar{x}_0+\xi_0)-\hat{v}(t_0, \bar{x}_0+\xi_0) \\
& =v(t_0, \bar{x}_0+\xi_0)-\hat{v}(t_0, \bar{x}_0)+l(t_0, \xi_0) \\
& \geqslant N[v](t_0, \bar{x}_0)-\hat{v}(t_0, \bar{x}_0) \\
& \geqslant v(t_0, \bar{x}_0)-\hat{v}(t_0, \bar{x}_0).
\end{aligned}
$$

因此，(4.88)式成立。从而得知，存在 $x_0\in \mathbf{R}^n$，使得 (4.88)、(4.89)式成立。利用定理2.4的证明，可知条件(4.88)将导致矛盾。因此，得到

$$
v(t, x)\leqslant \hat{v}(t, x), \quad \forall (t, x)\in [0, T]\times \mathbf{R}^n.
$$

交换 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 的地位，便可得到定理的结论。

证明的关键是找到 $\mathscr{O}(x_0)$，在该集合上，值函数 $\hat{v}(\cdot, \cdot)$ 不接触脉冲障碍 $N[\hat{v}](\cdot)$，从而可以利用 §2 中的证明过程。而为得到 $\mathscr{O}(x_0)$，需要值函数的一致连续性和一致有界性以及脉冲花费函数 $l(\cdot, \cdot)$ 的特殊性质。这里略去了在找到 $\mathscr{O}(x_0)$ 后的证明具体过程。读者不妨借鉴于定理 4.3 证明的后半部分以及定理 2.4 的证明自行将证明补上。

推论 4.11 设 (4.67) 式和第二章(5.13)～(5.16) 式成立。则有限时区最优脉冲控制的值函数 $v(\cdot, \cdot)$ 是 (4.51) 唯一的一致连续一致有界的粘性解。

证 由(4.67)式及第二章(5.13)～(5.16)式知(4.68)式成立。然后，利用定理 4.9，得到推论 4.11 的结论。

§5 混合控制问题与具有转换策略微分对策问题

本节讨论的内容有：混合控制问题以及具有转换策略的微分对策问题中的粘性解理论。

首先考虑无限时区具有连续实施、转换与脉冲控制的混合最优控制问题. 由第二章 §6 所建立的结果知，当值函数 $v(\cdot)=(v^1(\cdot),\cdots,v^m(\cdot))$ 是 C^1 时，它满足下述方程:

$$
\begin{cases}
\max\{\lambda v^d(x)-H^d(x,Dv^d(x)),\ v^d(x)-M[v^d](x),\\
v^d(x)-N[v^d](x)\}=0,\\
\qquad (x,d)\in \boldsymbol{R}^n\times\Lambda,
\end{cases} \tag{5.1}
$$

其中,

$$
H^d(x,p)=\inf_{u\in U}\{(p,f(x,u,d))+f^0(x,u,d)\},
$$

$$
\forall(x,p,d)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\times\Lambda, \tag{5.2}
$$

$$
M^d[v](x)=\min_{\bar d\neq d}\{v^{\bar d}(x)+k(d,\bar d)\},
$$

$$
(x,d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda, \tag{5.3}
$$

$$
N[v^d](x)=\inf_{\xi\in K}\{v^d(x+\xi)+l(\xi)\},
$$

$$
(x,d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda. \tag{5.4}
$$

由于 $v(\cdot)$ 未必是 C^1 的，因此，需要引入下面的定义.

定义 5.1 函数 $w(\cdot)\in C(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$ 称为是(5.1)的一个粘性下解，如果对任何 $d\in\Lambda$, $\varphi(\cdot)\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$，只要 $w^d(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在某点 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$ 取到局部极大值，则

$$
\max\{\lambda w^d(x_0)-H^d(x_0,D\varphi(x_0)),\ w^d(x_0)-M^d[w](x_0),
$$

$$
w^d(x_0)-N[w^d](x_0)\}\leqslant 0. \tag{5.5}
$$

类似地定义粘性上解，即将上面定义中极大改为极小而(5.5)式中"$\leqslant 0$"改为"$\geqslant 0$". 当 $w(\cdot)$ 同时为(5.1)的粘性下解和粘性上解时，称 $w(\cdot)$ 为(5.1)的一个粘性解.

利用最优性原理(第二章定理 6.3)，可以证明下述命题:

命题 5.2 值函数 $v(\cdot)=(v^1(\cdot),\cdots,v^m(\cdot))$ 是(5.1)的一个粘性解.

我们将该命题的证明留给有兴趣的读者. 下面的目标

是给出(5.1)的粘性解的唯一性定理。先给出下面的引理，它很类似于引理 4.4。

引理 5.3 设 $v(\cdot)=(v^1(\cdot),\cdots,v^m(\cdot))$ 为(5.1)的一个粘性解，则

$$v^d(x)\leqslant\min\{M^d[v](x),\ N[v^d](x)\},\quad \forall(x,d)\in\boldsymbol{R}^n\times\Lambda. \tag{5.6}$$

其证明与引理 4.4 的证明几乎相同，故略去了证明。与前面几节相同，在证明(5.1) 的粘性解的唯一性时，并不需要将函数 $H^d(\cdot,\cdot)$ 限制成为 (5.2) 式的形式。对 $H^d:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 作如下假设：存在常数 $L>0$，$\gamma\in[0,1)$，以及连续函数 $\omega_1:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$\omega_2:\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$，$\omega_1$ 单调增加，$\omega_1(0)=0$，ω_2 关于其每个变量单调增加，$\omega_2(r,0)=0$，$\forall r\geqslant0$，使得

$$|H^d(x,p)-H^d(x,q)|\leqslant L(1+\|x\|^\gamma)\|p-q\|,\quad \forall x,p,q\in\boldsymbol{R}^n. \tag{5.7}$$

$$|H^d(x,p)-H^d(y,p)|\leqslant\omega_1(\|p\|\|x-y\|)+\omega_2(\|x\|\vee\|y\|,\ \|x-y\|),\quad \forall x,y,p\in\boldsymbol{R}^n, \tag{5.8}$$

当第二章 §6 中的假设(i)成立时，尚不能保证上述的(5.7)和(5.8)式成立。故必须进一步假设(比较第二章 (6.3) 式)。

$$\|f(x,u,d)\|\leqslant L+L_0\|x\|^\gamma,\quad \forall(x,u,d)\in\boldsymbol{R}^n\times U\times\Lambda. \tag{5.9}$$

对于函数 $k:\Lambda\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^1$ 和 $l:k\to\boldsymbol{R}^+$，除了第二章 §6 中的假设((6.6)～(6.9)式)以外，再作如下假设：存在 $\mu\in[0,1)$，使得

$$\lim_{\xi\in K,\|\xi\|\to\infty}\frac{1+\|\xi\|^\mu}{l(\xi)}=0. \tag{5.10}$$

且

$$\max_{d\neq\bar d}k(d,\bar d)<l_0\equiv\inf_{\xi\in K}l(\xi). \tag{5.11}$$

条件(5.11)的含意是转换花费总比脉冲花费便宜。这个条件在唯一性定理中将起关键作用。

引进下述函数类。

$$UC(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m) = \{v: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m \mid v(\cdot) \text{ 是一致连续的}\}, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}&\hat{Q}_\mu(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)\\ &= \left\{v(\cdot) \in UC(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m) \,\middle|\, \sup_{x,\hat{x} \in \boldsymbol{R}^n} \frac{\|v(x) - v(\hat{x})\|}{1 + \|x - \hat{x}\|^\mu} < \infty\right\}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

注意到，当第二章(6.4)式中的 $\delta \leqslant \mu$ 时，相应的值函数

$$v(\cdot) \in \hat{Q}_\mu(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m). \tag{5.14}$$

比较 §2 中引入的函数类 $Q_m(\boldsymbol{R}^n)$ 与上述的 $\hat{Q}_\mu(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$，易见，此处的 $\hat{Q}_\mu(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ 对函数的要求较高。值得注意的是，当 $v(\cdot) \in UC(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ 且

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} \frac{\|v(x)\|}{1 + \|x\|^\mu} < \infty \tag{5.15}$$

时，未必有

$$\sup_{x,\hat{x} \in \boldsymbol{R}^n} \frac{\|v(x) + \hat{v}(\hat{x})\|}{1 + \|x - \hat{x}\|^\mu} < \infty. \tag{5.16}$$

当然，(5.16)式可以导致(5.15)式。现在，我们来叙述下面的唯一性定理。

定理 5.4 设(5.7)、(5.8)，(5.10)、(5.11)以及第二章 §6 中关于 k 和 l 的假设（第二章 (6.6)～(6.9) 式）成立。设 $v(\cdot)$，$\hat{v}(\cdot) \in \hat{Q}_\mu(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ 为(5.1)式的两个粘性解，则 $v(\cdot) = \hat{v}(\cdot)$。

由于 $v(\cdot)$，$\hat{v}(\cdot) \in \hat{Q}_\mu(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$，故存在连续单调增加函数 $\omega: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$，$\omega(0) = 0$，以及常数 $C_1 > 0$，使得

$$\|v(x)-v(\hat{x})\|,\ \|\hat{v}(x)-\hat{v}(\hat{x})\|\leqslant\omega(\|x-\hat{x}\|)$$
$$\leqslant C_1(1+\|x-\hat{x}\|^{\mu}),\quad \forall x,\ \hat{x}\in\boldsymbol{R}^n. \tag{5.17}$$

然后，记σ, $\eta>0$, 满足

$$l_0-\max_{d\neq\bar{d}}k(d,\bar{d})-\omega(\sigma)\geqslant\eta. \tag{5.18}$$

我们有下述的引理。

引理 5.5 设 $\{d_i,\ \xi_i,\ y_i\}_{i=0}^{j}\subset\Lambda\times K\times\boldsymbol{R}^n$, 满足

$$\hat{v}^{d_i}(y_i)=\hat{v}^{d_i}(y_i+\xi_i)+l(\xi_i),\quad 0\leqslant i\leqslant j, \tag{5.19}$$
$$\|y_{i+1}-y_i-\xi_i\|<\sigma,\quad 0\leqslant i\leqslant j. \tag{5.20}$$

则存在常数 $\hat{C}>0$, 它仅依赖于 σ, m, μ, $l(\cdot)$, C_1 和 η, 使得

$$j\leqslant\hat{C}. \tag{5.21}$$

证 由假设条件，有(注意引理 5.3)

$$\begin{aligned}\hat{v}^{d_i}(y_i)&=\hat{v}^{d_i}(y_i+\xi_i)+l(\xi_i)\\&\geqslant\hat{v}^{d_{i+1}}(y_i+\xi_i)-k(d_{i+1},d_i)+l(\xi_i)\\&\geqslant\hat{v}^{d_{i+1}}(y_{i+1})-\omega(\sigma)-\max_{d\neq\bar{d}}k(d,\bar{d})+l_0\\&\geqslant\hat{v}^{d_{i+1}}(y_{i+1})+\eta\geqslant\cdots\cdots\\&\geqslant\hat{v}^{d_{\hat{i}}}(y_{\hat{i}})+(\hat{i}-i)\eta,\quad\forall 0\leqslant i\leqslant\hat{i}\leqslant j.\end{aligned} \tag{5.22}$$

不失一般性，可设

$$d_{\hat{i}}=d_0,\quad \hat{i}\geqslant j/m. \tag{5.23}$$

则有

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)\geqslant\hat{v}^{d_0}(y_{\hat{i}})+j/m\eta. \tag{5.24}$$

另一方面，由(5.17)式知

$$l(\xi_i)=\hat{v}^{d_i}(y_i)-\hat{v}^{d_i}(y_i+\xi_i)\leqslant C_1(1+\|\xi_i\|^{\mu}),$$
$$0\leqslant i\leqslant j. \tag{5.25}$$

因而，由(5.10)式知，可找到常数 $C_2>0$, 使得

$$\|\xi_i\|\leqslant C_2,\quad 0\leqslant i\leqslant j. \tag{5.26}$$

再由(5.20)式，可得

$$\|y_{\ell}-y_0\|\leqslant\sum_{i=0}^{\ell-1}\|y_i-y_{i+1}\|\leqslant j(\sigma+C_2). \tag{5.27}$$

从而,(5.24)式变为

$$\frac{j}{m}\eta\leqslant\hat{v}^{d_0}(y_0)-\hat{v}^{d_0}(y_{\ell})\leqslant C_1(1+\|y_0-y_{\ell}\|^{\mu})$$
$$\leqslant C_1\{1+[j(\sigma+C_2)]^{\mu}\}. \tag{5.28}$$

由于 $\mu<1$, 立即得知 $\hat{C}>0$ 存在,使得(5.21)式成立。

定理 5.4 的证明 设 $\varepsilon, \alpha\in(0,1)$。定义

$$\Phi^d(x,y)=v^d(x)-\hat{v}^d(y)-\frac{1}{\varepsilon}\|x-y\|^2-\alpha(\langle x\rangle+\langle y\rangle),$$
$$x,y\in\boldsymbol{R}^n,\ d\in\Lambda. \tag{5.29}$$

此处, $\langle x\rangle=(1+\|x\|^2)^{1/2}$。注意到 (5.15) 式对 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 均成立,故存在 $(x_0,y_0)\in\boldsymbol{R}^{2n}$, 使得对某个 $d_0\in\Lambda$,

$$\Phi^{d_0}(x_0,y_0)=\max_d\Phi^d(x_0,y_0)=\sup_{x,y}\max_d\Phi^d(x,y). \tag{5.30}$$

类似于定理 4.3 的证明(见(4.42)式),可设

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)<M^{d_0}[\hat{v}](y_0). \tag{5.31}$$

今假设

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)=N[\hat{v}^{d_0}](y_0)=\inf_{\xi\in K}[\hat{v}^{d_0}(y_0+\xi)+l(\xi)]. \tag{5.32}$$

由于 $\hat{v}(\cdot)\in\hat{Q}_{\mu}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$, 故(5.15)式成立,从而由(5.10)式知, 存在 $C_2>0$ (此处的 C_2 可以与引理 5.5 证明中的 C_2 相同),使得对某个

$$\xi_0\in K,\ \|\xi_0\|\leqslant C_2, \tag{5.33}$$

有

$$\hat{v}^{d_0}(y_0)=\hat{v}^{d_0}(y_0+\xi_0)+l(\xi_0). \tag{5.34}$$

于是,由引理 5.3, 有

$$\Phi^{d_0}(x_0+\xi_0, y_0+\xi_0) = v^{d_0}(x_0+\xi_0) - \hat{v}^{d_0}(y_0+\xi_0)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2 - \alpha(\langle x_0+\xi_0\rangle + \langle y_0+\xi_0\rangle)$$
$$= v^{d_0}(x_0+\xi_0) + l(\xi_0) - \hat{v}^{d_0}(y_0) - \frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2$$
$$-\alpha(\langle x_0\rangle + \langle y_0\rangle) - \alpha(\langle x_0+\xi_0\rangle - \langle x_0\rangle$$
$$+\langle y_0+\xi_0\rangle - \langle y_0\rangle) \geqslant N[v^{d_0}](x_0) - \hat{v}^{d_0}(y_0)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2 - \alpha(\langle x_0\rangle + \langle y_0\rangle) - 2\alpha|\xi_0|$$
$$\geqslant \Phi^{d_0}(x_0, y_0) - 2\alpha C_2. \tag{5.35}$$

再令 $\zeta: \boldsymbol{R}^{2n} \to [0, 1]$ 为一个 C^1 函数，它具有下述性质：

$$\begin{cases} \zeta(0, 0) = 1, \quad \zeta(x, y) < 1, \ \forall (x, y) \neq (0, 0), \\ \zeta(x, y) = 0, \quad \forall \|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \sigma^2, \\ \|D\zeta\| \leqslant \dfrac{2}{\sigma}. \end{cases} \tag{5.36}$$

这样的函数的存在性是显而易见的。然后，置

$$\zeta_1(x, y) = \zeta(x - x_0 - \xi_0, y - y_0 - \xi_0),$$
$$\forall (x, y) \in \boldsymbol{R}^{2n}. \tag{5.37}$$
$$\Psi_1^d(x, y) = \Phi^d(x, y) + 2C_2\alpha\zeta_1(x, y),$$
$$\forall (x, y, d) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \Lambda. \tag{5.38}$$

则对任何 $\|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \sigma^2$，

$$\Psi_1^d(x, y) = \Phi^d(x, y) \leqslant \Phi^{d_0}(x_0, y_0)$$
$$\leqslant \Phi^{d_0}(x_0+\xi_0, y_0+\xi_0) + 2C_2\alpha$$
$$= \Psi_1^{d_0}(x_0+\xi_0, y_0+\xi_0)$$
$$\leqslant \max_d \Psi_1^d(x_0+\xi_0, y_0+\xi_0). \tag{5.39}$$

因此，存在

$$(x_1, y_1) \in \mathcal{O}_\sigma(x_0+\xi_0, y_0+\xi_0)$$
$$\equiv \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^{2n} \mid \|x_0+\xi_0-x\|^2 + \|y_0+\xi_0-y\|^2 < \sigma^2\},$$

使得对某个 $d_1\in\Lambda$，

$$\Psi_1^{d_1}(x_1, y_1)=\max_d \Psi^d(x_1, y_1)=\sup_{x,y}\max_d \Psi^d(x, y). \tag{5.40}$$

仍不妨设

$$\hat{v}^{d_1}(y_1)<M^{d_1}[\hat{v}](y_1). \tag{5.41}$$

再设

$$\hat{v}^{d_1}(y_1)=N[\hat{v}^{d_1}](y_1)=\inf_{\xi\in K}\{\hat{v}^{d_1}(y_1+\xi)+l(\xi)\}. \tag{5.42}$$

于是，仍可找到

$$\xi_1\in k, \quad \|\xi_1\|\leqslant C_2, \tag{5.43}$$

使得

$$\hat{v}^{d_1}(y_1)=\hat{v}^{d_1}(y_1+\xi_1)+l(\xi_1). \tag{5.44}$$

然后，由引理 5.3，(类似于(5.35)式)，有

$$\begin{aligned}
&\Psi_1^{d_1}(x_1+\xi_1, y_1+\xi_1)=v^{d_1}(x_1+\xi_1)-\hat{v}^{d_1}(y_1+\xi_1)\\
&-\frac{1}{\varepsilon}\|x_1-y_1\|^2-\alpha(\langle x_1+\xi_1\rangle+\langle y_1+\xi_1\rangle)\\
&+2C_2\alpha\zeta_1(x_1-x_0-\xi_0, y_1-y_0-\xi_0)\\
&\geqslant\Psi_1^{d_1}(x_1, y_1)-2C_2\alpha-2C_2\alpha\zeta_1(x_1, y_1)\\
&\geqslant\Psi_1^{d_1}(x_1, y_1)-2^2C_2\alpha.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

由此，再定义 $\Psi_2^d(\cdot, \cdot)$ 如下：

$$\Psi_2^d(x, y)=\Psi_1^d(x, y)+2^2C_2\alpha\zeta_2(x, y),\quad \forall(x, y, d)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\times\Lambda. \tag{5.46}$$

其中，

$$\zeta_2(x, y)=\zeta(x-x_1-\xi_1, y-y_1-\xi_1),\quad \forall(x, y)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n. \tag{5.47}$$

利用数学归纳法，以及引理 5.5，可得 $j\leqslant\hat{C}$，使得对某 x_j，$y_j\in\boldsymbol{R}^n$，$d_j\in\Lambda$，有

$$
\begin{cases}
\hat{v}^{d_j}(y_j) < \min\{M^{d_j}[\hat{v}](y_j),\ N[\hat{v}^{d_j}](y_j)\}, \\
\Psi_j^{d_j}(x_j,\ y_j) = \sup\limits_{x,y} \max\limits_{d} \Psi_j^d(x,\ y), \\
\Psi_j^d(x,\ y) = \Phi^d(x,\ y) + C_2\alpha \sum\limits_{i=1}^{j} 2^i \zeta_i(x, y), \quad x, y \in \boldsymbol{R}^n, d \in \Lambda, \\
\zeta_i(x,\ y) = \zeta(x - x_i - \xi_i,\ y - y_i - \xi_i). \quad 1 \leqslant i \leqslant j.
\end{cases}
\tag{5.48}
$$

由 $\Psi_j^{d_j}(0,\ 0) \leqslant \Psi_j^{d_j}(x_j,\ y_j)$，可见

$$
\begin{aligned}
\alpha(\langle x_j\rangle + \langle y_j\rangle) &\leqslant v^{d_j}(x_j) - \hat{v}^{d_j}(y_j) - \frac{1}{\varepsilon}\|x_j - y_j\|^2 \\
&\quad + C_2\alpha\sum_{i=1}^{j} 2^i - v^{d_j}(0) + \hat{v}^{d_j}(0) + 2\alpha \\
&\quad - C_2\alpha\sum_{i=1}^{j} 2^i\zeta_i(0,\ 0) \leqslant C_1(2 + \|x_j\|^\mu + \|y_j\|^\mu) + \widetilde{C}.
\end{aligned}
\tag{5.49}
$$

此处，$\widetilde{C}$ 为一个不依赖于 ε 和 α 的常数。由于 $\mu<1$，立即可得 $R_\alpha>0$，使得

$$
\|x_j\|,\ \|y_j\| \leqslant R_\alpha, \quad \forall \varepsilon,\ \alpha > 0. \tag{5.50}
$$

必须指出，x_j 和 y_j 是依赖于参数 ε 和 α 的选取的。(5.50)式表明，x_j 和 y_j 的范数上界可以不依赖于 $\varepsilon>0$。再由

$$
2\Psi_j^{d_j}(x_j,\ y_j) \geqslant \Psi_j^{d_j}(x_j,\ x_j) + \Psi_j^{d_j}(y_j,\ y_j),
$$

可得

$$
\begin{aligned}
&2\Big\{v^{d_j}(x_j) - \hat{v}^{d_j}(y^j) - \frac{1}{\varepsilon}\|x_j - y_j\|^2 - \alpha(\langle x_j\rangle + \langle y_j\rangle) \\
&\quad + C_2\alpha\sum_{i=1}^{j} 2^i\zeta_i(x_j,\ y_j)\Big\} \geqslant v^{d_j}(x_j) - \hat{v}^{d_j}(x_j) - 2\alpha\langle x_j\rangle \\
&\quad + C_2\alpha\sum_{i=1}^{j} 2^i\zeta_i(x_j,\ x_j) + v^{d_j}(y_j) - \hat{v}^{d_j}(y_j) - 2\alpha\langle y_j\rangle \\
&\quad + C_2\alpha\sum_{i=1}^{j} 2^i\zeta_i(y_j,\ y_j).
\end{aligned}
$$

从而

$$\frac{1}{\varepsilon}\|x_j-y_j\|^2\leqslant\frac{1}{2}\Big\{v^{\alpha j}(x_j)-v^{\alpha j}(y_j)+\hat{v}^{\alpha j}(x_j)-\hat{v}^{\alpha j}(y_j)$$

$$+C_2\alpha\sum_{i=1}^{j}2^i\zeta_i(x_j,\ y_j)\Big\}\leqslant\omega(\|x_j-y_j\|)+\bar{C}\alpha. \tag{5.51}$$

其中，$\bar{C}$ 为一个绝对常数(不依赖于 ε 和 α)。然后，类似于§2 和 §4，利用粘性解的定义，有

$$\max\Big\{\lambda v^{\alpha j}(x_j)-H^{\alpha j}\Big(x_j,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_j-y_j)+\alpha\frac{x_j}{\langle x_j\rangle}$$

$$-C_2\alpha\sum_{i=1}^{j}2^iD_x\zeta_i(x_j,\ y_j)\Big),\ v^{\alpha j}(x_j)-M^{\alpha j}[v](x_j),$$

$$v^{\alpha j}(x_j)-N[v^{\alpha j}](x_j)\Big\}\leqslant 0, \tag{5.52}$$

$$\max\Big\{\lambda\hat{v}^{\alpha j}(y_j)-H^{\alpha j}\Big(y_j,\ \frac{2}{\varepsilon}(x_j-y_j)-\alpha\frac{y_j}{\langle y_j\rangle}$$

$$+C_2\alpha\sum_{i=1}^{j}2^iD_y\zeta_i(x_j,\ y_j)\Big),\ \hat{v}^{\alpha j}(y_j)-M^{\alpha j}[\hat{v}](y_j),$$

$$\hat{v}^{\alpha j}(y_j)-N[\hat{v}^{\alpha j}](y_j)\Big\}\geqslant 0. \tag{5.53}$$

因此，利用(5.48)式中的第一式及(5.52)，(5.53)式，可以立即得到下述两不等式：

$$\begin{cases}\lambda\hat{v}^{\alpha j}(x_j)\leqslant H^{\alpha j}\Big(x_j,\ \dfrac{2}{\varepsilon}(x_j-y_j)+\alpha\dfrac{x_j}{\langle x_j\rangle}\\ \qquad\qquad -C_2\alpha\displaystyle\sum_{i=1}^{j}2^iD_x\zeta_i(x_j,\ y_j)\Big),\\ \lambda\hat{v}^{\alpha j}(y_j)\geqslant H^{\alpha j}\Big(y_j,\ \dfrac{2}{\varepsilon}(x_j-y_j)-\alpha\dfrac{y_j}{\langle y_j\rangle}\\ \qquad\qquad +C_2\alpha\displaystyle\sum_{i=1}^{j}2^iD_y\zeta_i(x_j,\ y_j)\Big).\end{cases} \tag{5.54}$$

再由(5.7)、(5.8)式，

$$\lambda(v^{d_f}(x_f) - \hat{v}^{d_f}(y_f)) \leqslant \omega_1\left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\|x_f - y_f\| + \bar{C}\alpha\right)\|x_f - y_f\|\right)$$

$$+ \omega_2(R_{\alpha_f}\|x_f - y_f\|) + aL(2 + \|x_f\|^\gamma + \|y_f\|^\gamma)\bar{C}.$$

此处，$\bar{C}$ 为绝对常数。由(5.51)式知，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\|x_f - y_f\|^2 \leqslant \bar{C}\alpha. \tag{5.55}$$

而由(5.50)式知，可设当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$(x_f, y_f) = (x_f(\varepsilon, \alpha), y_f(\varepsilon, \alpha)) \to (x^\alpha, x^\alpha), d_f \to \bar{d}, \tag{5.56}$$

从而在(5.54)式中，令 $\varepsilon\to 0$，可得

$$\lambda[v^{\bar{d}}(x^\alpha) - \hat{v}^{\bar{d}}(x^\alpha)] \leqslant 2\alpha\bar{C}L(1 + \|x^\alpha\|^\gamma) + \omega_1(2\bar{C}\alpha) \tag{5.57}$$

再由(5.48)式的第二式知，对任何 $x\in \boldsymbol{R}^n$，

$$v^d(x) - \hat{v}^d(x) \leqslant 2\alpha\langle x\rangle + v^{\bar{d}}(x^\alpha) - \hat{v}^{\bar{d}}(x^\alpha) + \bar{C}\alpha - 2\alpha\langle x^\alpha\rangle$$

$$\leqslant \alpha[2\langle x\rangle + \bar{C}] - 2\alpha\left[\langle x^\alpha\rangle - \frac{\bar{C}}{\lambda}L(1 + \|x^\alpha\|^\gamma)\right]$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\omega_1(2\bar{C}\alpha). \tag{5.58}$$

由于 $\gamma<1$，故在(5.58)式中令 $\alpha\to 0$，得到

$$v^d(x) \leqslant \hat{v}^d(x), \quad \forall (x, d)\in \boldsymbol{R}^n\times\Lambda. \tag{5.59}$$

由于 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 地位对称，最终证得 $v(\cdot) = \hat{v}(\cdot)$。

利用上述定理，可以容易地得到下面的关于无限时区具有连续实施、转换与脉冲控制的混合最优控制值函数的刻画。

推论 5.6 设第二章 (6.2) ~ (6.10) 式以及 (5.9) ~ (5.11) 式成立，且 $\delta\leqslant\mu$。则问题 CSI 的值函数 $v(\cdot)$ 是(5.1)式的唯一的粘性解。

应该注意，当 $f^0(x, u, d)$ 是有界时，不需要条件 $\delta\leqslant\mu$，

即只要 $\delta\in(0,1]$，$\mu<1$。因为类似于第二章§7中的命题7.2，此时，必有

$$v(\cdot)\in\hat{Q}_{\mu}(\boldsymbol{R}^{n},\boldsymbol{R}^{m}).$$

另外，当 A 为单点集时，问题 OSI 变为仅有连续实施和脉冲控制的混合最优控制问题。再进一步，若 U 也为单点集，则问题化为无限时区的最优脉冲控制问题。此时，在适当的条件下，便可得到无限时区最优脉冲控制问题值函数的刻画。在此，不详细叙述和证明有关的结论了。

现在，研究无限时区上具有转换策略的二人零和微分对策的值函数存在性问题。由第二章§7知，相应的下值函数 $V(\cdot)$ 为 C^1 时，它满足

$$\begin{cases}\min\{\max\{\lambda W^{a,b}(x)-H^{a,b}(x,W_x^{a,b}(x));W^{a,b}(x)\\ \quad -M^{a,b}[W](x)\},W^{a,b}(x)-M_{a,b}[W](x)\}=0,\\ \qquad (a,b,x)\in A\times B\times X,\\ \max\{\min\{\lambda W^{a,b}(x)-H^{a,b}(x,W_x^{a,b}(x)),W^{a,b}(x)\\ \quad -M_{a,b}[W](x)\},W^{a,b}(x)-M^{a,b}[W](x)\}=0,\\ \qquad (a,b,x)\in A\times B\times X,\end{cases}\tag{5.60}$$

其中，

$$\begin{cases}M^{a,b}[W](x)=\min\limits_{a\neq\bar a,\bar a\in A}\{W^{\bar a,b}(x)+k(a,\bar a)\},\\ M_{a,b}[W](x)=\max\limits_{\bar b\neq b,\bar b\in B}\{W^{a,\bar b}(x)-l(b,\bar b)\},\\ \qquad\forall(a,b,x)\in A\times B\times X.\end{cases}\tag{5.61}$$

$$H^{a,b}(x,p)=f^0(x,a,b)+(p,f(x,a,b)),\quad \forall(a,b,x,p)\in A\times B\times X\times X.\tag{5.62}$$

而当上值函数 $U(\cdot)$ 是 C^1 时，它也同样满足(5.60)。一般而言，上、下值函数均未必是 C^1 的，故有必要引入下面的粘性

解概念。

定义 5.7 函数 $W(\cdot)\in BUC(X;\mathbf{R}^{m\times n})\equiv\{W(\cdot): X\to\mathbf{R}^{m\times n}|W(\cdot)$ 是一致有界且一致连续的$\}$ 称为是(5.60)的一个粘性解，如果对任何 C^1 函数 $\varphi(\cdot)$，只要 $W^{a,b}(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在某点 $x_0\in X$ 达到局部极大值(极小值)，则

$$\begin{cases}\min\{\max\{\lambda W^{a,b}(x_0)-H^{a,b}(x_0,\varphi_x(x_0)), W^{a,b}(x_0)\\ \quad -M^{a,b}[W](x_0)\}, W^{a,b}(x_0)-M_{a,b}[W](x_0)\}\leqslant 0(\geqslant 0),\\ \max\{\min\{\lambda W^{a,b}(x_0)-H^{a,b}(x_0,\varphi_x(x_0)), W^{a,b}(x_0)\\ \quad -M_{a,b}[W](x_0)\}, W^{a,b}(x_0)-M^{a,b}[W](x_0)\}\leqslant 0(\geqslant 0).\end{cases} \tag{5.63}$$

利用第二章定理7.4，不难证明下述结果：

命题 5.8 在第二章 §7 的条件假设下，上、下值函数 $U(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 均是(5.60)的粘性解。

为建立方程(5.60)的粘性解的唯一性定理。先证明下述引理。

引理 5.9 设 $W(\cdot)$ 为(5.60)的一个粘性解，则

$$M_{a,b}[W](x)\leqslant W^{a,b}(x)\leqslant M^{a,b}[W](x),\quad \forall(a,b,x)\in A\times B\times X. \tag{5.64}$$

证 先证

$$M_{a,b}[W](x)\leqslant W^{a,b}(x),\quad \forall(a,b,x)\in A\times B\times X, \tag{5.65}$$

用反证法。假设存在 $(a,b,x_0)\in A\times B\times X$，使得

$$M_{a,b}[W](x_0)>W^{a,b}(x_0), \tag{5.66}$$

由所涉及的函数的连续性，易知，存在 $\delta_0>0$，使得

$$M_{a,b}[W](x)>W^{a,b}(x),\quad \forall|x-x_0|<\delta_0. \tag{5.67}$$

今设

$$R>\max_{\|x-x_0\|\leqslant\delta_0}|W^{a,b}(x)|. \tag{5.68}$$

定义

$$\Phi(x)=W^{a,b}(x)-2R\zeta(x-x_0),\quad x\in X. \tag{5.69}$$

其中，$\zeta(\cdot)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 满足(4.27)式。则对任何 $\|x-x_0\|=\delta_0$，有

$$\Phi(x)=W^{a,b}(x)>-R\geqslant\Phi(x_0). \tag{5.70}$$

因此，存在 $x_1\in\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid\|x_1-x_0\|<\delta_0\}$，使得 $\Phi(\cdot)$ 在 x_1 处达到局部极小值，即 $x\mapsto W^{a,b}(x)-2R\zeta(x-x_0)$ 在 x_1 处达到局部极小。因此，由粘性解的定义知，

$$\begin{aligned}&\min\{\max\{\lambda W^{a,b}(x_1)-H^{a,b}(x_1,2R\zeta_x(x_1-x_0)),\\&W^{a,b}(x_1)-M^{a,b}[W](x_1)\},W^{a,b}(x_1)\\&-M_{a,b}[W](x_1)\}\geqslant 0.\end{aligned} \tag{5.71}$$

由此可知，

$$W^{a,b}(x_1)\geqslant M_{a,b}[W](x_1). \tag{5.72}$$

这与(5.67)式矛盾，故得证(5.65)式。同理，利用(5.60)中第二个方程可证(5.64)式的另一半。

该引理很像引理4.4、4.8和5.3。为证明(5.60)粘性解的唯一性，还需要作一个假设：对任何有限序列

$$\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^j\subset A\times B,$$

满足 $a_{j+1}=a_1$，$b_{j+1}=b$，均成立

$$\sum_{i=1}^j k(a_i,a_{i+1})-\sum_{i=1}^j l(b_i,b_{i+1})\neq 0. \tag{5.73}$$

现在，叙述并证明下述的唯一性定理。

定理 5.10 设第二章§7中假设均成立，再设(5.73)式成立。则(5.60)的粘性解是唯一的。

证 设 $W(\cdot)$ 和 $\hat{W}(\cdot)$ 为(5.60)的两个粘性解。令

$$K\geqslant\sup_{x\in X}\|W(x)\|,\ \sup_{x\in X}\|\hat{W}(x)\|. \tag{5.74}$$

令 $r(\cdot):X\to[0,1]$，$\sigma:X\times X\to[0,1]$，为 C^1 函数，它们分

别满足下述条件：

$$\begin{cases} r(0)=1, \quad r(x)<1, \quad \forall x\neq 0, \\ r(x)=0, \quad \forall \|x\|\geqslant 1, \quad \|Dr(x)\|\leqslant C, \quad \forall x\in X. \end{cases} \tag{5.75}$$

$$\begin{cases} \sigma(0,0)=1, \quad \sigma(x,y)<1, \quad \forall (x,y)\neq(0,0), \\ \sigma(x,y)=0, \quad \forall \|x\|^2+\|y\|^2\geqslant 1, \\ \|D_x\sigma\|, \|D_y\sigma\|\leqslant C. \end{cases} \tag{5.76}$$

对任何 $\varepsilon>0$，置 $r_\varepsilon(x)=r(x/\varepsilon)$。然后定义

$$\Phi^{a,b}(x,y)=W^{a,b}(x)-\widehat{W}^{a,b}(y)+3Kr_\varepsilon(x-y), \quad \forall (a,b,x,y)\in A\times B\times X\times X. \tag{5.77}$$

易见，$\Phi^{a,b}(x,y)$ 在 $X\times X$ 上是有界的，因此，可以找到 x_0, $y_0\in X$，使得

$$\sup_{x,y}\max_{a,b}\Phi^{a,b}(x,y)\leqslant\max_{a,b}\Phi^{a,b}(x_0,y_0)+\varepsilon. \tag{5.78}$$

然后，定义

$$\Psi^{a,b}(x,y)=\Phi^{a,b}(x,y)+2\varepsilon\sigma(x-x_0,y-y_0), \quad \forall (a,b,x,y)\in A\times B\times X\times X, \tag{5.79}$$

则当 $\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned} \max_{a,b}\Psi^{a,b}(x,y) &= \max_{a,b}\Phi^{a,b}(x,y) \\ &\leqslant \max_{a,b}\Phi^{a,b}(x_0,y_0)+\varepsilon<\max_{a,b}\Psi^{a,b}(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{5.80}$$

因此，可以找到 $(\hat{x}_0,\hat{y}_0)$ 满足 $\|x_0-\hat{x}_0\|^2+\|y_0-\hat{y}_0\|^2<1$ 以及 $(a_1,b_1)\in A\times B$，使得

$$\Psi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\hat{y}_0)=\sup_{x,y}\max_{a,b}\Psi^{a,b}(x,y). \tag{5.81}$$

假设对此 $(a_1,b_1,\hat{x}_0,\hat{y}_0)$ 有

$$W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-M_{a_1,b_1}[W](\hat{x}_0)>0, \tag{5.82}$$

$$\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)-M^{a_1,b_1}[W](\hat{y}_0)<0. \tag{5.83}$$

由(5.81)式知，函数

$$x \mapsto W^{a_1,b_1}(x) - \{\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0) - 3Kr_\varepsilon(x_0 - \hat{y}_0) - 2\varepsilon\sigma(x - x_0, \hat{y}_0 - y_0)\}$$

在 $\hat{x}_0$ 处达到局部极大，因此，

$$\min\{\max\{\lambda W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0) - H^{a_1,b_1}(\hat{x}_0, -3KDr_\varepsilon(\hat{x}_0 - \hat{y}_0) - 2\varepsilon D_x\sigma(\hat{x}_0 - x_0, \hat{y}_0 - y_0)), W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0) - M^{a_1,b_1}[W](\hat{x}_0)\}, W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0) - M_{a_1,b_1}[W](\hat{x}_0)\} \leqslant 0, \tag{5.84}$$

而函数

$$y \mapsto \widehat{W}^{a_1,b_1}(y) - \{W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0) + 3Kr_\varepsilon(\hat{x}_0 - y) + 2\varepsilon\sigma(\hat{x}_0 - x_0, y - y_0)\}$$

在 $\hat{y}_0$ 达到局部极小，因此，

$$\min\{\max\{\lambda\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0) - H^{a_1,b_1}(\hat{y}_0, -3KDr_\varepsilon(\hat{x}_0 - \hat{y}_0) + 2\varepsilon D_y\sigma(\hat{x}_0 - x_0, \hat{y}_0 - y_0)), \widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0) - M^{a_1,b_1}[\widehat{W}](\hat{y}_0)\}, \widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0) - M_{a_1,b_1}[\widehat{W}](\hat{y}_0)\} \geqslant 0. \tag{5.85}$$

由(5.82)和(5.83)式知

$$\begin{cases} \lambda W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0) - H^{a_1,b_1}(\hat{x}_0, -3KDr_\varepsilon(\hat{x}_0 - \hat{y}_0) \\ \qquad - 2\varepsilon D_x\sigma(\hat{x}_0 - x_0, \hat{y}_0 - y_0)) \leqslant 0, \\ \lambda\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0) - H^{a_1,b_1}(\hat{y}_0, -3KDr_\varepsilon(\hat{x}_0 - \hat{y}_0) \\ \qquad + 2\varepsilon D_y\sigma(\hat{x}_0 - x_0, \hat{y}_0 - y_0)) \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.86}$$

从而，得到

$$\begin{aligned} &\lambda(W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0) - \widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)) \leqslant f^0(\hat{x}_0, a_1, b_1) \\ &- f^0(\hat{y}_0, a_1, b_1) - 3K(Dr_\varepsilon(\hat{x}_0 - \hat{y}_0), f(\hat{x}_0, a_1, b_1) \\ &- f(\hat{y}_0, a_1, b_1)) + 2\varepsilon[(D_x\sigma(\hat{x}_0 - x_0, \hat{y}_0 - y_0), \\ &f(\hat{x}_0, a_1, b_1)) + (D_y\sigma(\hat{x}_0 - x_0, \hat{y}_0 - y_0), f(\hat{y}_0, a_1, b_1))] \\ &\leqslant L\|\hat{x}_0 - \hat{y}_0\| + 3KLC\frac{\|\hat{x}_0 - \hat{y}_0\|}{\varepsilon} + 4CL\varepsilon. \end{aligned} \tag{5.87}$$

此处，必须注意 $r_\varepsilon(x)=r\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，故 $\|Dr_\varepsilon(x)\|\leqslant\frac{C}{\varepsilon}$。另一方面，可见 $(\hat{x}_0,\hat{y}_0)$ 是依赖于 $\varepsilon>0$ 的。下面证明

$$\|\hat{x}_0-\hat{y}_0\|=o(\varepsilon),\quad (\varepsilon\to 0\text{ 时}). \tag{5.88}$$

事实上，首先有(设 $2\varepsilon<K$)

$$\|\hat{x}_0-\hat{y}_0\|\leqslant\varepsilon, \tag{5.89}$$

假若不然，则由(5.81)式知(注意 $\operatorname{supp} r_\varepsilon\subset\{z\in X\mid\|z\|\leqslant\varepsilon\}$)

$$\begin{aligned}&\Psi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\hat{y}_0)=W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)\\&+2\varepsilon\sigma(\hat{x}_0-x_0,\hat{y}_0-y_0)\leqslant W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)\\&+\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)+2\varepsilon+3Kr_\varepsilon(0)-3K\\&\leqslant\Phi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\hat{x}_0)+2\varepsilon-K<\Psi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\hat{x}_0).\end{aligned} \tag{5.90}$$

这与(5.81)式矛盾，因此，(5.89)式成立。进一步，由(5.81)式可得

$$\begin{aligned}&\Psi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\hat{x}_0)=W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)+3K\\&+2\varepsilon\sigma(\hat{x}_0-x_0,\hat{x}_0-y_0)\leqslant\Psi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\hat{y}_0)=W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)\\&-\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)+3Kr_\varepsilon(\hat{x}_0-\hat{y}_0)+2\varepsilon\sigma(\hat{x}_0-x_0,\hat{y}_0-y_0).\end{aligned}$$

即有

$$3K\left[1-r\left(\frac{\hat{x}_0-\hat{y}_0}{\varepsilon}\right)\right]\leqslant\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)+2\varepsilon C\to 0,$$
$$(\varepsilon\to 0). \tag{5.91}$$

因此，由 $r(\cdot)$ 的定义知，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|\hat{x}_0-\hat{y}_0\|}{\varepsilon}=0, \tag{5.92}$$

从而(5.88)式成立。因此，对任何 $(a,b,x)\in A\times B\times X$，由(5.81)、(5.87)及(5.88)式知，

$$\begin{aligned}&W^{a,b}(x)-\widehat{W}^{a,b}(x)\leqslant\Psi^{a,b}(x,x)-3K\leqslant\Psi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\hat{y}_0)-3K\\&\leqslant W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-\widehat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)+3K[r_\varepsilon(\hat{x}_0-\hat{y}_0)-1]+2\varepsilon C\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left\{L\|\hat{x}_0-\hat{y}_0\|+3KLC\frac{\|\hat{x}_0-\hat{y}_0\|}{\varepsilon}+4CL\varepsilon\right\}$$

$$+3K[r_\varepsilon(\hat{x}_0-\hat{y}_0)-1]+2\varepsilon C.$$

故知，

$$W^{a,b}(x)\leqslant\hat{W}^{a,b}(x),\ \forall(a,\ b,\ x)\in A\times B\times X. \quad (5.93)$$

今假如条件(5.82)、(5.83)式不成立，则不妨设

$$W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)=M_{a_1,b_1}[W](\hat{x}_0)$$

$$=\max_{\bar{b}\neq b_1}\{W^{a_1,\bar{b}}(\hat{x}_0)-l(b_1,\ \bar{b})\}. \quad (5.94)$$

再不妨设 $b_2\in B\setminus\{b_1\}$，使得

$$W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)=W^{a_1,b_2}(\hat{x}_0)-l(b_1,\ b_2). \quad (5.95)$$

利用第二章条件(7.7)，易证

$$W^{a_1,b_2}(\hat{x}_0)>M_{a_1,b_2}[W](\hat{x}_0). \quad (5.96)$$

假设此时有

$$\hat{W}^{a_1,b_2}(\hat{y}_0)<M^{a_1,b_2}[W](\hat{y}_0), \quad (5.97)$$

则由

$$W^{a_1,b_2}(\hat{x}_0)-\hat{W}^{a_1,b_2}(\hat{y}_0)=W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)+l(b_1,\ b_2)$$

$$-\hat{W}^{a_1,b_2}(\hat{y}_0)\geqslant W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-M_{a_1,b_1}[\hat{W}](\hat{y}_0)$$

$$\geqslant W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0)-\hat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0). \quad (5.98)$$

可得

$$\Psi^{a_1,b_2}(\hat{x}_0,\ \hat{y}_0)\geqslant\Psi^{a_1,b_1}(\hat{x}_0,\ \hat{y}_0)=\sup_{x,y}\max_{a,b}\Psi^{a,b}(x,\ y). \quad (5.99)$$

从而，易见(5.98)和(5.99)式中等式均成立。故有

$$\hat{W}^{a_1,b_1}(\hat{y}_0)=\hat{W}^{a_1,b_2}(\hat{y}_0)-l(b_1,\ b_2). \quad (5.100)$$

用$(a_1,\ b_2)$代替前面的$(a_1,\ b_1)$可证明(5.93)。今假若(5.97)式不成立，则存在 $a_2\in A$，$a_2\neq a_1$，使得

$$\hat{W}^{a_1,b_2}(\hat{y}_0)=\hat{W}^{a_2,b_2}(\hat{y}_0)+k(a_1,\ a_2), \quad (5.101)$$

则此时必有

$$\hat{W}^{a_2,b_2}(\hat{y}_0) < M^{a_2,b_2}[\hat{W}](\hat{y}_0). \tag{5.102}$$

而类似于(5.98)～(5.100)式，可知

$$\Psi^{a_2,b_2}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) = \sup_{x,y} \max_{a,b} \Psi^{a,b}(x, y), \tag{5.103}$$

$$W^{a_1,b_2}(\hat{x}_0) = W^{a_2,b_2}(\hat{x}_0) + k(a_1, a_2). \tag{5.104}$$

今若有

$$W^{a_2,b_2}(\hat{x}_0) > M_{a_2,b_2}[W](\hat{x}_0), \tag{5.105}$$

则可以(a_2, b_2)代替(a_1, b_1)来证明(5.93)式。否则，继续上述过程。若此过程可以无限地延续下去，则可以找到序列$\{a_i, b_i\}_{i\geq 1}$，使得(见(5.95)，(5.104)，以及(5.100)，(5.101)式)

$$\begin{aligned} W^{a_1,b_1}(\hat{x}_0) &= W^{a_1,b_2}(\hat{x}_0) - l(b_1, b_2) \\ &= W^{a_2,b_2}(\hat{x}_0) + k(a_1, a_2) - l(b_1, b_2) \\ &= W^{a_2,b_3}(\hat{x}_0) - l(b_2, b_3) + k(a_1, a_2) - l(b_1, b_2) \\ &= \cdots\cdots, \end{aligned} \tag{5.106}$$

由于$A\times B$是一个有限集，故存在某个$j\leqslant mn$，使得

$$a_{j+1} = a_1, \quad b_{j+1} = b_1,$$

从而，由(5.106)式可得

$$\sum_{i=1}^{j} k(a_i, a_{i+1}) - \sum_{i=1}^{j} l(b_i, b_{i+1}) = 0. \tag{5.107}$$

这与假设((5.73)式)矛盾。故上述过程必终止于某个有限步。设对应的指标为$(\hat{a}, \hat{b})$，则利用$(\hat{a}, \hat{b})$代替(a_1, b_1)，最终可得到(5.93)式。由于$W(\cdot)$和$\hat{W}(\cdot)$地位是对称的，得到

$$W(\cdot) = \hat{W}(\cdot).$$

利用上述定理及命题5.8，可以获得下述结论。

定理5.11 设第二章§7中(G1)～(G3)成立，且设(5.73)式成立。则具转换策略的二人零和微分对策存在值函数。

对于经典的二人零和微分对策问题，为保证值函数的存在，需要所谓的 Isaacs 条件（见推论 2.7）。而对现在的二人零和微分对策问题，没有假设 Isaacs 条件，而作了假设(5.73)式。该条件所表明的是两个博奕者之间的某种非平等性。

下面，我们来考虑当转换花费函数 $k(\cdot,\cdot)$ 和 $l(\cdot,\cdot)$ 趋于零的情形。直观上可以想象相应问题的极限应与经典的二人零和微分对策有密切关系。为了讨论这个问题，设 $\{k_\varepsilon(\cdot,\cdot),\ l_\varepsilon(\cdot,\cdot)\}$ 为一族转换花费函数。当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$k_\varepsilon(a,\hat{a})\to 0,\ l_\varepsilon(b,\hat{b})\to 0$$

对应于每对 $k_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ 和 $l_\varepsilon(\cdot,\cdot)$，研究相应的具转换策略的二人零和微分对策。记 $V_\varepsilon(\cdot)$ 为相应的下值函数而 $U_\varepsilon(\cdot)$ 为相应的上值函数。则由第二章 §7 的结果知，$\forall\varepsilon>0$，

$$|V_\varepsilon^{a,b}(x)|,\ |U_\varepsilon^{a,b}(x)|\leqslant\frac{L}{\lambda},$$

$$\forall(a,b,x)\in A\times B\times X, \tag{5.108}$$

$$|V_\varepsilon^{a,b}(x)-V_\varepsilon^{a,b}(\hat{x})|,\ |U_\varepsilon^{a,b}(x)-U_\varepsilon^{a,b}(\hat{x})|\leqslant\frac{2L}{\lambda-\eta L}\|x-\hat{x}\|^\eta,$$

$$\forall(a,b)\in A\times B,\ x,\hat{x}\in X,\ 0<\eta<\min\{\delta,\lambda/L\}. \tag{5.109}$$

因此，$\{V_\varepsilon^{a,b}(\cdot)\}_{\varepsilon>0}$ 和 $\{U_\varepsilon^{a,b}(\cdot)\}_{\varepsilon>0}$ 为一致有界、等度连续的。由 Arzela-Ascoli 定理，可以找到子序列，使得

$$\begin{cases} V_\varepsilon^{a,b}(x)\to\hat{V}^{a,b}(x), \\ U_\varepsilon^{a,b}(x)\to\hat{U}^{a,b}(x), \end{cases}\quad\forall(a,b)\in A\times B, \tag{5.110}$$

关于 x 在任何有界集上一致收敛。现在考察极限 $\hat{V}^{a,b}(\cdot)$ 和 $\hat{U}^{a,b}(\cdot)$ 的性质。记

$$\begin{cases} H^+(x,p)=\min\limits_{a\in A}\max\limits_{b\in B}\{\langle p,f(x,a,b)\rangle+f^0(x,a,b)\}, \\ H^-(x,p)=\max\limits_{b\in B}\min\limits_{a\in A}\{\langle p,f(x,a,b)\rangle+f^0(x,a,b)\}. \end{cases}$$

$$(x,\ p)\in X\times X. \tag{5.111}$$

定理 5.12 函数 $\{\hat{V}^{a,b}(\cdot)\}$ 具有下述性质：

1° 存在函数 $v(\cdot)$，使得

$$\hat{V}^{a,b}(x)=v(x),\quad \forall (a,\ b,\ x)\in A\times B\times X. \tag{5.112}$$

2° 函数 $v(\cdot)$ 是下述方程的粘性下解：

$$\lambda v(x)-H^{+}(x,\ Dv(x))=0,\quad x\in X. \tag{5.113}$$

3° 函数 $v(\cdot)$ 是下述方程的粘性上解：

$$\lambda v(x)-H^{-}(x,\ Dv(x))=0,\quad x\in X. \tag{5.114}$$

证 1° 由于

$$M_{a,b}[V_\varepsilon](x)\leqslant V_\varepsilon^{a,b}(x)\leqslant M^{a,b}[V_\varepsilon](x),$$

且 $k_\varepsilon\to 0$ 和 $l_\varepsilon\to 0$，得知 $\hat{V}^{a,b}(\cdot)$ 是不依赖于 $(a,\ b)\in A\times B$ 的，所以得到 1°。此处，应注意算子 $M_{a,b}$ 和 $M^{a,b}$ 均是依赖于 ε 的。

2° 对任何 $\varphi(\cdot)\in C^1(X)$，设 $v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 $x_0\in X$ 处达到局部极大。令 $r: X\to[0,1]$ 为一光滑函数，满足

$$r(x_0)=1,\ r(x)<1,\ \forall x\neq x_0. \tag{5.115}$$

则对任何固定的 $\delta>0$，$v(\cdot)-[\varphi(\cdot)+\delta r(\cdot)]$ 在 x_0 处达到严格的局部极大值，于是，对任何 $a\in A$，由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \max_{b\in B}V_\varepsilon^{a,b}(x)=v(x). \tag{5.116}$$

关于 x 在有界集上一致，故可知存在 $x_\varepsilon\to x_0$，使得

$$\begin{aligned}&\max_{b\in B}V_\varepsilon^{a,b}(x_\varepsilon)-\varphi(x_\varepsilon)-\delta r(x_\varepsilon)\\ &>\max_{b\in B}V_\varepsilon^{a,b}(x)-\varphi(x)-\delta r(x),\end{aligned} \tag{5.117}$$

只要 x 充分靠近 x_ε。今设 $b_\varepsilon^a\in B$，使得

$$V_\varepsilon^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon)=\max_{b\in B}V_\varepsilon^{a,b}(x_\varepsilon). \tag{5.118}$$

对于任何 $b\in B\setminus\{b_\varepsilon^a\}$，$l(b_\varepsilon^a,\ b)>0$，故由(5.118)式知

$$V_\varepsilon^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon) > M_{a,b_\varepsilon^a}[V_\varepsilon](x_\varepsilon). \tag{5.119}$$

而由于 $x \mapsto V_\varepsilon^{a,b_\varepsilon^a}(x) - [\varphi(x) + \delta r(x)]$ 在 x_ε 处达到局部极大，故由粘性解的定义知

$$\min\{\max\{\lambda V_\varepsilon^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon) - H^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon, D\varphi(x_\varepsilon) + \delta Dr(x_\varepsilon)), \\ V_\varepsilon^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon) - M^{a,b_\varepsilon^a}[V_\varepsilon](x_\varepsilon)\}, V_\varepsilon^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon) \\ - M_{a,b_\varepsilon^a}[V_\varepsilon](x_\varepsilon)\} \leqslant 0. \tag{5.120}$$

由(5.119)式立即得到

$$\lambda V_\varepsilon^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon) - H^{a,b_\varepsilon^a}(x_\varepsilon, D\varphi(x_\varepsilon) + \delta Dr(x_\varepsilon)) \leqslant 0. \tag{5.121}$$

令 $\varepsilon \to 0$，设 $b_a^\varepsilon \to \bar{b}^a \in B$，则得到

$$\lambda v(x_0) - H^{a,\bar{b}^a}(x_0, D\varphi(x_0) + \delta Dr(x_0)) \leqslant 0. \tag{5.122}$$

再令 $\delta \to 0$，得到

$$\lambda v(x_0) - H^{a,\bar{b}^a}(x_0, D\varphi(x_0)) \leqslant 0. \quad \forall a \in A. \tag{5.123}$$

这意味着

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} \{\lambda v(x_0) - H^{a,b}(x_0, D\varphi(x_0))\} \leqslant 0,$$

即

$$\lambda v(x_0) - H^+(x_0, D\varphi(x_0)) \leqslant 0. \tag{5.124}$$

故 $v(\cdot)$ 为(5.113)式的一个粘性下解，从而得证 2°。

3° 与 2° 的证明类似，故略去证明。

对于上值函数的极限 $\hat{U}^{a,b}(\cdot)$，也有完全一样的结果。即存在函数 $u(\cdot)$，使得

$$\hat{U}^{a,b}(x) = u(x), \quad \forall (a, b, x) \in A \times B \times X. \tag{5.125}$$

且 $u(\cdot)$ 是(5.113)的一个粘性下解，是(5.114)的一个粘性上解。值得注意的是，$v(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 未必是对应于控制集为 A 和 B 的二人零和经典微分对策的下值函数和上值函数。但是，我们却有下述的结果。

推论 5.13 假如下述的 Isaacs 条件成立：

$$H^+(x, p) = H^-(x, p) \equiv H(x, p),$$
$$\forall x, p \in X. \tag{5.126}$$
则存在函数 $w(\cdot)$，使得
$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon^{a,b}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon^{a,b}(x) = w(x), \tag{5.127}$$
关于 x 在任何有界集上一致。函数 $w(\cdot)$ 是下述方程的唯一的粘性解：
$$\lambda w(x) - H(x, Dw(x)) = 0, \quad x \in X. \tag{5.128}$$
且函数 $w(\cdot)$ 为相应于控制集为 A 和 B 的经典二人零和微分对策的值函数(此时值函数必存在)。

证 此时，有
$$v(\cdot) = u(\cdot). \tag{5.129}$$
然后，由(5.128)的粘性解的唯一性知，整个序列 $V_\varepsilon^{a,b}(\cdot)$ 和 $U_\varepsilon^{a,b}(\cdot)$ 收敛。

从某种意义上讲，上述推论给出了经典二人零和微分对策的一种逼近。

正如第二章 §7 末尾所指出的，对于有限时区非定常情形以及具有混合策略的微分对策，也可以建立相应的粘性解理论，限于篇幅，这里就不一一详述了。

第四章　无限维控制问题

本章将考虑无限维控制问题的相应动态规划方法及Hamilton-Jacobi-Bellman方程理论。值得注意的是无限维问题并非有限维问题的简单推广。从前面第二章中可见，对于无限时区定常问题，相应的HJB方程是稳态的。我们将在本章中仅限于讨论无限时区定常问题，因为在叙述上，稳态的HJB方程要简洁些。

§1　无限维经典最优控制问题

考虑某个Banach空间X上的发展方程

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t), u(t)), \ t \geqslant 0, \\ y(0) = x. \end{cases} \tag{1.1}$$

此处，$A: \mathscr{D}(A) \subset X \to X$ 为C_0类算子半群e^{At}的母元，$f: X \times U \to X$为一个给定的映照，而U为某个度量空间。(1.1)中的$u(\cdot)$是取值于U的可测函数，称之为容许控制，记

$$\mathscr{U} = \{u(\cdot): [0, \infty) \to U \mid u(\cdot) \text{ 可测}\}.$$

(1.1)中的$y(t)$是系统在时刻t的状态，而$y(0)=x$为系统的初状态。类似于第一章§4，方程(1.1)式的解$y(\cdot)$理解为下述积分方程的解：

$$y(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau, y(\tau), u(\tau)) \mathrm{d}\tau, \tag{1.2}$$

$$t \in [0, \infty).$$

在进一步讨论之前，先给出一些假设。

(H1) 存在 $\hat{L}\geqslant 1$, $\omega\in \boldsymbol{R}$, 使得

$$\|e^{At}\|\leqslant \hat{L}e^{\omega t},\ \forall t\geqslant 0. \tag{1.3}$$

(H2) $f: X\times U\to X$, $f^0: X\times U\to \boldsymbol{R}$ 为连续映照，且存在 $L>0$, $0<\delta\leqslant 1$, 使得对任何 $x, \hat{x}\in X$, $u\in U$,

$$\|f(x,u)-f(\hat{x},u)\|\leqslant L\|x-\hat{x}\|, \tag{1.4}$$

$$\|f(x,u)\|\leqslant L(1+\|x\|), \tag{1.5}$$

$$|f^0(x,u)-f^0(\hat{x},u)|\leqslant L\|x-\hat{x}\|^{\delta}, \tag{1.6}$$

$$|f^0(x,u)|\leqslant L. \tag{1.7}$$

(H1) 是一个不失一般性的假设，在下面的讨论中，可以将条件 (1.7) 放松，但为叙述简便起见，作了较强的假设 (1.7)。易知，当映照 f 满足 (1.4)、(1.5) 时，对任何给定的 $x\in X$, $u(\cdot)\in\mathscr{U}$, 存在唯一的 $y(\cdot)\in C([0,\infty);X)$ 满足 (1.2) 式。记 $y(\cdot)$ 为 $y_x(\cdot)$, 以指明它对初值 x 的依赖。它也是依赖于控制 $u(\cdot)$ 的。现在，对于 $\lambda>0$, 定义

$$J_x(u(\cdot))=\int_0^{\infty}f^0(y_x(t),u(t))e^{-\lambda t}\mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

于是，经典的最优控制问题可以叙述成下面的问题。

问题 C　对给定的 $x\in X$, 寻找 $u^*(\cdot)\in\mathscr{U}$, 使得

$$J_x(u^*(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}J_x(u(\cdot)). \tag{1.9}$$

类似于以前的情形，满足上述条件的 $u^*(\cdot)$ 称为是一个最优控制。定义问题 C 的值函数为

$$v(x)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}J_x(u(\cdot)),\ x\in X. \tag{1.10}$$

为了研究值函数 $v(\cdot)$ 的性质，先给出下述的命题。

命题 1.1　在条件 (H1)、(H2) 下，对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$, x, $\hat{x}\in X$, 有

$$\|y_x(t)-y_{\hat{x}}(t)\|\leqslant \hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\|x-\hat{x}\|,\ \forall t\geqslant 0。\quad (1.11)$$

证 对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$, x, $\hat{x}\in X$, 由 (1.2)、(1.3) 和 (1.4)式知

$$\|y_x(t)-y_{\hat{x}}(t)\|\leqslant \hat{L}e^{\omega t}\|x-\hat{x}\|$$
$$+\int_0^t \hat{L}Le^{\omega(t-s)}\|y_x(s)-y_{\hat{x}}(s)\|ds。$$

然后,利用第一章中命题4.13的证明可立即得到(1.11)式。

利用此命题,来证明下述的命题。

命题 1.2 设 $(H1)$、$(H2)$ 成立。则

$$|v(x)|\leqslant\frac{L}{\lambda},\ \forall x\in X,\quad (1.12)$$

$$|v(x)-v(\hat{x})|\leqslant\frac{2L}{\lambda-\eta(\omega+\hat{L}L)}\|x-\hat{x}\|^{\eta},\ \forall x,\hat{x}\in X,\quad (1.13)$$

此处, $0<\eta<\min\left\{\delta,\ \frac{\lambda}{\omega+\hat{L}L}\right\}$。

证 利用条件(1.7), 即得(1.12)式。现要证明(1.13)式。由(1.6)、(1.7)式知

$$|f^0(x,u)-f^0(\hat{x},u)|\leqslant 2L\|x-\hat{x}\|^{\eta},\ \forall x,\hat{x}\in X。\quad (1.14)$$

然后,利用(1.11)式得证(1.13)式。

命题 1.3 (最优性原理) 对任何 $x\in X$, $t\geqslant 0$,

$$v(x)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}\left\{\int_0^t f^0(y_x(s),u(s))e^{-\lambda s}ds+v(y_x(t))e^{-\lambda t}\right\}。\quad (1.15)$$

该命题的证明与有限维的情形是一样的，因为上述结果仅用到 $y(\cdot)$ 的动力系统的性质而并不涉及到具体的状态方程和状态空间的维数。

命题 1.4 (HJB 方程) 若值函数 $v(\cdot)\in C^1(X)$，则它满足下述的 HJB 方程

$$\lambda v(x)-H(x, v_x(x))=0, \forall x\in \mathscr{D}(A)。\qquad(1.16)$$

此处，

$$H(x, p)=\langle p, Ax\rangle+\inf_{u\in U}\{\langle p, f(x, u)\rangle+f^0(x, u)\},$$
$$\forall (x, p)\in \mathscr{D}(A)\times X^*。\qquad(1.17)$$

值得注意的是上面的 Hamilton 函数 $H(x, p)$ 仅仅是定义在 $\mathscr{D}(A)\times X^*$ 上的而不是 $X\times X^*$ 上！因此，方程(1.16)与有限维情形的相应方程(见第二章(2.50))有本质的差别。不过命题 1.4 的证明与有限维情形仍是基本相同的，唯一的不同点是只能对 $x\in \mathscr{D}(A)$ 导出方程(1.16)。上面所强调的本质差别在讨论粘性解时非常本质地暴露出来了。事实上，若用第三章 §2 中的方法来证明粘性解的唯一性，必须有 $H(x, p)$ 的全定义性（即需定义于 $X\times X^*$ 上）和连续性。但由于 A 的无界性，这一点是办不到的。因此，必须另避途径来考虑这个问题。

一个直观的想法是考虑用“较好”的控制问题去逼近原来的控制问题，而对这“较好”的控制问题，可以严格地建立起有关的粘性解理论。下面的过程就是基于这个想法的。

令 $\mu_0\geqslant 0$，$\{A_\mu, \mu\in \mathscr{M}\}$ 为一族 X 上的线性有界算子，此处，$\mathscr{M}\subset[\mu_0, \infty)$，$\sup\mathscr{M}=+\infty$。注意 $\mathscr{M}$ 可以是一个序列，也可以是 $[\mu_0, \infty)$。在下面的叙述中，为方便起见，就认为 $\mathscr{M}=[\mu_0, \infty)$。现在，对算子族 $\{A_\mu, \mu\in[\mu_0, \infty)\}$ 作如下假设：

(H3) 对任何 $z(\cdot)\in C([0,\infty);X)$，以及任何 $T>0$，

$$\lim_{\mu\to+\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\int_0^t\left[e^{A(t-s)}-e^{A_\mu(t-s)}\right]f(z(s),u(s))\mathrm{d}s\right\|=0, \tag{1.18}$$

关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$ 一致；且对任何 $x\in X$，$T>0$，

$$\lim_{\mu\to\infty}\|e^{A_\mu t}x-e^{At}x\|=0,\ \text{关于}\ t\in[0,T]\ \text{一致}; \tag{1.19}$$

同时，

$$\|e^{A_\mu}\|\leqslant\hat{L}e^{\omega t},\ t\geqslant0,\ \mu\geqslant\mu_0. \tag{1.20}$$

下面，来看一下条件(H3)的广泛性。

情形 1° 设 X 为 Hilbert 空间，A 具有完全的正交特征向量系，即设 $\{\varphi_n\}_{n\geqslant1}$ 为 X 的一个正交标准基，使得

$$A\varphi_n=-\lambda_n\varphi_n,\ n\geqslant1, \tag{1.21}$$

此处，$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots\cdots$，$\lambda_n\uparrow+\infty$。则容易知道

$$e^{At}x=\sum_{n\geqslant1}e^{-\lambda_n t}\langle x,\varphi_n\rangle\varphi_n,\ t\geqslant0,\ x\in X. \tag{1.22}$$

令置

$$\begin{cases}X_n=\operatorname{span}\{\varphi_k;\ k\leqslant n\},\ n\geqslant1.\\ P_nx=\sum_{k\leqslant n}\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k,\ \forall x\in X,\ n\geqslant1.\end{cases} \tag{1.23}$$

然后，定义

$$A_n=AP_n;\ X\to X_n\subset X,\ n\geqslant1. \tag{1.24}$$

则有

$$e^{A_nt}x=\sum_{k\leqslant n}e^{-\lambda_k t}\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k,\ \forall n\geqslant1,\ x\in X, \tag{1.25}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|e^{A_nt}-e^{At}\|&\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant1}\sum_{k>n}e^{-\lambda_k t}|\langle x,\varphi_k\rangle|\\&\leqslant\sum_{k>n}e^{-\lambda_k t}\to0,\ (n\to\infty).\end{aligned} \tag{1.26}$$

从而，只要取 $\mathscr{M}=\boldsymbol{N}=\{$自然数全体$\}$，则当(1.5)式成立时，

(H3)成立。利用类似的方法，可以说明对于所有半线性抛物型控制系统，(H3)基本上是可以得到满足的。

情形 2° 设 X 为 Hilbert 空间，$\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ 为 X 的一个标准正交基，使得

$$\begin{cases} A\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\ n\geq 1, \\ |\mathrm{Re}\lambda_n|\leq C,\ n\geq 1. \end{cases} \tag{1.27}$$

设对任何 $R>0$,

$$\lim_{n\to\infty}|\langle f(x,u),\varphi_n\rangle|=0, \tag{1.28}$$

关于 $\|x\|\leq R$, $u\in U$ 一致。

则取 $\mathscr{M}=\boldsymbol{N}$, A_n 类似于(1.24)式，可以验证(H3)是成立的。上述情形包含了一类双曲型控制系统，但它具有一定的局限性。条件(1.28)意味着半线性项 $f(x,u)$ 对于高频部分发生的作用是不大的。

从上述两种情形看，条件(H3)还是有足够的广泛性的。现在，对于 $\mu\geq\mu_0$，考察下述发展方程：

$$\begin{cases} \dot{y}_x^\mu(t)=A_\mu y_x^\mu(t)+f(y_x^\mu(t),u(t)),\ \text{a. e. } t\geq 0, \\ y_x^\mu(0)=x. \end{cases} \tag{1.29}$$

由于 A_μ 是有界的，故由(H2)知，对任何 $x\in X$, $u(\cdot)\in\mathscr{U}$, (1.29)存在唯一的解 $y_x^\mu(\cdot)\in W_{loc}^{1,1}([0,\infty);X)$，即 $y_x^\mu(\cdot)$ 是绝对连续的，且满足(1.29)式。另外，容易知道，该解 $y_x^\mu(\cdot)$ 也可由常数变易公式表示成下述形式：

$$y_x^\mu(t)=e^{A_\mu t}x+\int_0^t e^{A_\mu(t-s)}f(y_x^\mu(s),u(s))ds,\ t\geq 0. \tag{1.30}$$

命题 1.5 设(H1)～(H3)成立。则对任何给定的 $x\in$

X, $T>0$,

$$\begin{cases} \lim\limits_{\mu\to\infty}\|y_x^\mu(t;u(\cdot))-y_x(t;u(\cdot))\|=0, \\ \text{关于 } u(\cdot)\in\mathscr{U},\ t\in[0,\ T]\text{一致。} \end{cases} \tag{1.31}$$

证　首先，由(1.5)、(1.3)和(1.20)式知，对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$,

$$\|y_x(t)\|,\ \|y_x^\mu(t)\|\leqslant\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\{\|x\|+Lt\},\ t\geqslant 0, \tag{1.32}$$

而由(1.2)及(1.30)式知，对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$,

$$\begin{aligned}\|y_x^\mu(t)-y_x(t)\|\leqslant&\|(e^{A_\mu t}-e^{At})x\| \\ &+\left\|\int_0^t[e^{A_\mu(t-s)}-e^{A(t-s)}]f(y(s),\ u(s))\mathrm{d}s\right\| \\ &+\int_0^t\hat{L}e^{\omega(t-s)}L\|y_x^\mu(s)-y_x(s)\|\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0.\end{aligned}$$

故由 Gronwall 不等式以及条件(1.18)和(1.19)，立即得到(1.31)式。

现在，定义

$$J_x^\mu(u(\cdot))=\int_0^\infty f^0({}_x^\mu y(t),\ u(t))e^{-\lambda t}\mathrm{d}t. \tag{1.33}$$

然后，引入下述问题。

问题 C^μ　对任何给定的 $x\in X$，寻找 $u^*(\cdot)\in\mathscr{U}$，使得

$$J_x^\mu(u^*(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}J_x^\mu(u(\cdot))\equiv v^\mu(x). \tag{1.34}$$

问题C和问题 C^μ 之间有很好的关系，将其表述在下面的命题中。

命题 1.6　设(H1)～(H3)成立，则对任何 $x\in X$,

$$\lim_{\mu\to\infty}v^\mu(x)=v(x). \tag{1.35}$$

证　对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$，由(1.6)、(1.7)知，对取定的 $T>0$,

$$|J_x^\mu(u(\cdot)) - J_x(u(\cdot))| \leqslant 2L\int_T^\infty e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

$$+ L\int_0^T \|y_x^\mu(t) - y_x(t)\|^\delta e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{2L}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T})$$

$$+ L\int_0^T \|y_x^\mu(t) - y_x(t)\|^\delta\,\mathrm{d}t.$$

故，由命题 1.5 知

$$\varlimsup_{\mu\to+\infty}|J_x^\mu(u(\cdot)) - J_x(u(\cdot))| \leqslant \frac{2L}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}),$$

关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$ 一致。 (1.36)

由 $T>0$ 的任意性，可得(1.35)式。

由上述结果知，问题 C^μ 是原来问题 C 的一个很好的逼近。现在，我们来研究一下问题 C^μ. 容易知道，下述命题是成立的。

命题 1.7 设(H2)和(1.20)式成立，则对任何 $\mu\geqslant\mu_0$，

$$|v^\mu(x)| \leqslant \frac{L}{\lambda}, \tag{1.37}$$

$$|v^\mu(x) - v^\mu(\hat{x})| \leqslant \frac{2L}{\lambda - \eta(\omega + \hat{L}L)}\|x - \hat{x}\|^\eta,\ x,\ \hat{x}\in X. \tag{1.38}$$

此处， $0<\eta<\min\left\{\delta,\ \dfrac{L}{\omega + \hat{L}L}\right\}$.

命题 1.8 （最优性原理） 对任何 $x\in X$, $t\geqslant 0$,

$$v^\mu(x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}\left\{\int_0^t f^0(y_x^\mu(s),\ u(s))e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s + v^\mu(y_x^\mu(t))e^{-\lambda t}\right\}. \tag{1.39}$$

命题 1.9 （HJB 方程） 若值函数 $v^\mu(\cdot)\in C^1(X)$，则

它满足下述的 HJB 方程

$$\lambda v^{\mu}(x) - H^{\mu}(x, v_x^{\mu}(x)) = 0, x \in X, \tag{1.40}$$

其中，

$$H^{\mu}(x, p) = \langle p, A_{\mu}x\rangle + \inf_{u \in U}\{\langle p, f(x, u)\rangle + f^0(x, u)\},$$
$$\forall (x, p) \in X \times X^*. \tag{1.41}$$

由于 A_μ 的有界性，$H^{\mu}(x, p)$是在整个 $X \times X^*$ 上有定义的。因此，方程(1.40)要比方程 (1.16) 好得多。可以想象，有限维的粘性解理论应对方程(1.40)成立。不过，在这当中，需要克服一些技术性的困难，其原因是由于空间X不是有限维的，故有界闭集上连续函数未必能达到其最大值。现在，先给出下述定义。

定义 1.10 函数 $w(\cdot) \in C(X)$ 称为是方程 (1.40) 的一个粘性解，如果对任何的 $\varphi(\cdot) \in C^1(X)$，只要 $w(\cdot) - \varphi(\cdot)$ 在 $x_0 \in X$ 处达到局部极大(小)值，则

$$\lambda w(x_0) - H^{\mu}(x_0, Dw(x_0)) \leqslant 0, \ (\geqslant 0) \tag{1.42}$$

成立。

类似于有限维情形，可以容易地证明下面结果。

命题 1.11 值函数 $v^{\mu}(\cdot)$ 是方程 (1.40) 的一个粘性解。

为了建立方程 (1.40) 粘性解的唯一性，还需作一些准备。首先，对底空间X需作进一步的假设：

(H4) 存在 $r(\cdot) \in C(X)$，它在 $X \setminus \{0\}$ 上是 Fréchet 可导的，且存在常数 $C_0 > 0$，使得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\|x\| \leqslant r(x) \leqslant C_0\|x\|, \ \forall x \in X, \\ \|Dr(x)\| \leqslant C_0, \ \forall x \in X \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{1.43}$$

对于泛函分析较为熟悉的读者可以知道，当X为一致凸

时，范数$\|\cdot\|$可以取作$r(\cdot)$。而特别地，当X为 Hilbert 空间时，可以直接证明下述的结果。

命题 1.12 设X为 Hilbert 空间。则若记$r(x)=\|x\|$，便有

$$Dr(x)=\frac{x}{\|x\|}, \ \forall x\neq 0. \tag{1.44}$$

证 对任何$x\in X\setminus\{0\}$，以及$y\in X$，$\|y\|\leqslant 1$，取$\lambda>0$，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\left\langle\frac{x}{\|x\|}, y\right\rangle\right|\\=&\left|\frac{\|x+\lambda y\|^2-\|x\|^2}{\lambda(\|x+\lambda y\|+\|x\|)}-\left\langle\frac{x}{\|x\|}, y\right\rangle\right|\\=&\left|\frac{\langle 2x, y\rangle}{\|x+\lambda y\|+\|x\|}-\left\langle\frac{x}{\|x\|}, y\right\rangle\right|\\\leqslant&\left\|\frac{2x}{\|x+\lambda y\|+\|x\|}-\frac{x}{\|x\|}\right\|\to 0, \ (\lambda\to 0).\end{aligned}$$

关于$\|y\|\leqslant 1$一致。因此，(1.44)式得证。

由上可知，条件(H4)还是相当一般的。

命题 1.13 设(H4)成立，则$r(\cdot)^2\in C^1(X)$，且

$$D[r(x)^2]=\begin{cases}2r(x)Dr(x), & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases} \tag{1.45}$$

证 只需证明$r(\cdot)^2$在 0 点的 Fréchet 可导性。为此，考虑$\lambda>0$，$\|y\|\leqslant 1$，利用关于函数$\lambda\to r(\lambda y)^2$的中值定理，存在$\theta\in[0, 1]$，使得

$$\begin{aligned}r(\lambda y)^2-r(0)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[r(\tau y)^2]\Big|_{\tau=\theta\lambda}\cdot\lambda\\&=2r(\theta\lambda y)\langle Dr(\theta\lambda y), y\rangle\lambda.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|\frac{r(\lambda y)^2-r(0)^2}{\lambda}\right|\leqslant 2r(\theta\lambda y)\|Dr(\theta\lambda y)\|\|y\|$$

$$\leqslant 2C_0\|\theta\lambda y\|\cdot C_0$$

$$\leqslant 2C_0\lambda\to 0,\ (\lambda\to 0),$$

关于$\|y\|\leqslant 1$一致。从而得证命题。

下面的引理是一个非常有趣且又深刻的结果。由于其证明要涉及到许多 Banach 空间的理论， 故将其证明放在后面§4 中。

引理 1.14 (Stegall) 设X为自反 Banach 空间，$D\subset X$为一个有界凸闭集。设 $f: D\to\boldsymbol{R}$ 是上半连续上有界的。则对任何 $\delta>0$，存在 $x^*\in X^*$，使得 $\|x^*\|<\delta$，且 $f+x^*$ 强暴露D，即存在 $x_0\in D$，使得

$$f(x_0)+x^*(x_0)=\sup(f+x^*)(D),\qquad(1.46)$$

且对任何的 $x_k\in D$，只要

$$\lim_{k\to\infty}[f(x_k)+x^*(x_k)]=f(x_0)+x^*(x_0),\qquad(1.47)$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x_0\|=0。\qquad(1.48)$$

当 $X=\boldsymbol{R}^n$ 时，由D的有界闭性知，D 是一个紧集．因此，定义于D上的上半连续上有界的函数 f 必可达到其最大值。但是，当 $\dim X=+\infty$ 时，D 的有界凸闭性不能导出其紧性。因此，定义于 D 上面的上半连续上有界的函数 f 未必能达到其最大值。Stegall 引理讲，这时只要对 f 作一个任意小的适当的线性摄动，便可使得摄动后的函数在D上达到其最大值，且最大值点还有较好的性质。例如，由(1.47)、(1.48)式知，至少最大值点是唯一的。

现在，证明本节中的一个主要结果，即方程(1.40)的粘性解的唯一性。首先，当(H2)成立时，有：$\forall x,\ y\in X,\ p,\ q\in$

X^*,

$$\begin{cases}|H^\mu(x,p)-H^\mu(x,q)|\leqslant\|p-q\|[(\|A_\mu\|+L)\|x\|+L],\\ |H^\mu(x,p)-H^\mu(y,p)|\leqslant[\|A_\mu\|+L]\|p\|\|x-y\|\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +L\|x-y\|^\delta.\end{cases} \tag{1.49}$$

易见，(1.49)很像第三章中(2.2)～(2.3)。记

$$L_0=\|A_\mu\|+L.$$

则(1.49)式蕴含

$$\begin{cases}|H^\mu(x,p)-H^\mu(x,q)|\leqslant L_0(1+\|x\|)\|p-q\|,\\ |H^\mu(x,p)-H^\mu(y,p)|\leqslant L_0\|p\|\|x-y\|+L\|x-y\|^\delta.\end{cases} \tag{1.50}$$

定理 1.15 设 X 为自反 Banach 空间，(H4) 成立，且(1.50)式成立。设 $v(\cdot)$，$\hat{v}(\cdot)$ 为一致有界的局部一致连续的方程(1.40)的粘性解，则

$$v(\cdot)=\hat{v}(\cdot). \tag{1.51}$$

证 定义

$$\langle x\rangle=\sqrt{1+r(x)^2},\ x\in X. \tag{1.52}$$

则易知，

$$D\langle x\rangle=\frac{r(x)Dr(x)}{\langle x\rangle},\ \forall x\in X. \tag{1.53}$$

取 $0<m<\dfrac{\lambda}{L_0C_0^2}$，$\varepsilon$，$\alpha>0$，定义

$$\Phi(x,y)=v(x)-\hat{v}(y)-\frac{1}{\varepsilon}r(x-y)^2-\alpha(\langle x\rangle^m+\langle y\rangle^m),$$
$$x,y\in X. \tag{1.54}$$

由于 $v(\cdot)$和 $\hat{v}(\cdot)$是一致有界的，故

$$\lim_{\|x\|+\|y\|\to\infty}\Phi(x,y)=-\infty. \tag{1.55}$$

因此，可以找到一个 $R_\alpha>0$，使得 $(\lim\limits_{\alpha\to 0} R_\alpha=+\infty)$，

$$\sup_{\|x\|+\|y\|>R_\alpha}\Phi(x,y)\leqslant\sup_{\|x\|+\|y\|\leqslant R_\alpha}\Phi(x,y)-1. \tag{1.56}$$

此处应注意 R_α 是可以不依赖于 $\varepsilon>0$ 的。令

$$B_{R_\alpha}=\{(x,y)\in X\times X\mid\|x\|+\|y\|<R_\alpha\}.$$

对于有界凸闭集 $\bar{B}_{R_\alpha}$ 和连续有上界的函数 $\Phi(x,y)$，利用引理1.14，可以找到 $p_\varepsilon,q_\varepsilon\in X^*$，

$$\|p_\varepsilon\|+\|q_\varepsilon\|<\varepsilon, \tag{1.57}$$

使得 $\Phi(x,y)+\langle p_\varepsilon,x\rangle+\langle q_\varepsilon,y\rangle$ 在某点 $(x_0,y_0)\in B_{R_\alpha}$ 达到其在 $\bar{B}_{R_\alpha}$ 上的最大值。需记住 (x_0,y_0) 是依赖于 ε,α 的。由

$$\begin{aligned}&2\Phi(x_0,y_0)+2\langle p_\varepsilon,x_0\rangle+2\langle q_\varepsilon,y_0\rangle\\ \geqslant&\Phi(x_0,x_0)+\langle p_\varepsilon,x_0\rangle+\langle q_\varepsilon,x_0\rangle+\Phi(y_0,y_0)\\ &+\langle p_\varepsilon,y_0\rangle+\langle q_\varepsilon,y_0\rangle.\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}\frac{2}{\varepsilon}r(x_0-y_0)^2\leqslant&v(x_0)-v(y_0)+\hat{v}(x_0)\\ &-\hat{v}(y_0)+\langle p_\varepsilon-q_\varepsilon,x_0-y_0\rangle.\end{aligned} \tag{1.58}$$

由 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 的局部一致连续性，设 $\omega_\alpha:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^-$，$\omega_\alpha(\cdot)$ 是单调上升的，连续的，$\omega_\alpha(0)=0$，使得

$$\begin{aligned}|v(x)-v(y)|+|\hat{v}(x)-\hat{v}(y)|\leqslant\omega_\alpha(|x-y|),\\ \forall\|x\|,\|y\|\leqslant R_\alpha.\end{aligned} \tag{1.59}$$

于是，由(1.58)式知(注意(1.43)式)当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}\|x_0-y_0\|^2\leqslant&C_0r(x_0-y_0)^2\\ \leqslant&\frac{C_0\varepsilon}{2}[\omega_\alpha(\|x_0-y_0\|)+\varepsilon\|x_0-y_0\|]\to 0.\end{aligned} \tag{1.60}$$

从而当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\frac{1}{\varepsilon}\|x_0-y_0\|^2=o(1). \tag{1.61}$$

由点(x_0, y_0)的定义知，函数

$$x\mapsto v(x)-\Big[\hat{v}(y_0)+\frac{1}{\varepsilon}r(x-y_0)^2+\alpha\langle x\rangle^m$$

$$+\alpha\langle y_0\rangle^m-\langle p_\varepsilon, x\rangle-\langle q_\varepsilon, y_0\rangle\Big]$$

在 x_0 点达到局部极大值，因此，由粘性解的定义，有

$$\lambda v(x_0)-H^\mu\Big(x_0, \frac{2}{\varepsilon}r(x_0-y_0)Dr(x_0-y_0)$$

$$+\alpha m\langle x_0\rangle^{m-2}r(x_0)Dr(x_0)-p_\varepsilon\Big)\leqslant 0. \tag{1.62}$$

同理，函数

$$y\mapsto\hat{v}(y)-\Big[v(x_0)-\frac{1}{\varepsilon}r(x_0-y)^2-\alpha\langle x_0\rangle^m$$

$$-\alpha\langle y\rangle^m+\langle p_\varepsilon, x_0\rangle+\langle q_\varepsilon, y\rangle\Big]$$

在 y_0 点达到局部极小值，从而，

$$\lambda\hat{v}(y_0)-H^\mu\Big(y_0, \frac{2}{\varepsilon}r(x_0-y_0)Dr(x_0-y_0)$$

$$-\alpha m\langle y_0\rangle^{m-2}r(y_0)Dr(y_0)+q_\varepsilon\Big)\geqslant 0. \tag{1.63}$$

因此，

$$\lambda[v(x_0)-\hat{v}(y_0)]\leqslant H^\mu\Big(x_0, \frac{2}{\varepsilon}r(x_0-y_0)Dr(x_0-y_0)$$

$$+\alpha m\langle x_0\rangle^{m-2}r(x_0)Dr(x_0)-p_\varepsilon\Big)$$

$$-H^\mu\Big(y_0, \frac{2}{\varepsilon}r(x_0-y_0)Dr(x_0-y_0)$$

$$-\alpha m\langle y_0\rangle^{m-2}r(y_0)Dr(y_0)+q_\varepsilon\Big)$$

$$\leqslant H^{\mu}\left(x_0, \frac{2}{\varepsilon} r(x_0-y_0) Dr(x_0-y_0)\right)$$

$$+L_0(1+\|x_0\|)[\alpha m\langle x_0\rangle^{m-2} r(x_0) C_0+\varepsilon]$$

$$-H^{\mu}\left(y_0, \frac{2}{\varepsilon} r(x_0-y_0) Dr(x_0-y_0)\right)$$

$$+L_0(1+\|y_0\|)[\alpha m\langle y_0\rangle^{m-2} r(y_0) C_0+\varepsilon]$$

$$\leqslant L_0 \frac{2C_0}{\varepsilon} r(x_0-y_0)\|x_0-y_0\|$$

$$+L\|x_0-y_0\|^{\delta}$$

$$+L_0\alpha m C_0^2[\langle x_0\rangle^m+\langle y_0\rangle^m]$$

$$+L_0\varepsilon(\|x_0\|+\|y_0\|)$$

$$+L_0[\alpha m C_0^2(\langle x_0\rangle^{m-1}$$

$$+\langle y_0\rangle^{m-1})+2\varepsilon]. \tag{1.64}$$

此处，用到了以下事实：

$$\|x_0\| \leqslant C_0 r(x_0) \leqslant C_0\sqrt{1+r(x_0)^2}=C_0\langle x_0\rangle.$$

于是，对任何 $x\in X$，当 α 充分小时，可以认为 $2\|x\|\leqslant R_\alpha$，从而，$(x, x)\in \bar{B}_{R_\alpha}$。由 (x_0, y_0) 的定义知，

$$v(x)-\hat{v}(x)-2\alpha\langle x\rangle^m+\langle p_\varepsilon, x\rangle+\langle q_\varepsilon, x\rangle$$

$$\leqslant v(x_0)-\hat{v}(y_0)-\frac{1}{\varepsilon} r(x_0-y_0)^2$$

$$-\alpha(\langle x_0\rangle^m+\langle y_0\rangle^m)+\langle p_\varepsilon, x_0\rangle+\langle q_\varepsilon, y_0\rangle$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\cdot 2L_0 C_0^2 \frac{\|x_0-y_0\|^2}{\varepsilon}+\frac{L}{\lambda}\|x_0-y_0\|^{\delta}$$

$$-\alpha\left\{\left(1-\frac{L_0 C_0^2 m}{\lambda}\right)(\langle x_0\rangle^m+\langle y_0\rangle^m)\right.$$

$$\left.-\frac{L_0 C_0^2 m}{\lambda}(\langle x_0\rangle^{m-1}+\langle y_0\rangle^{m-1})\right\}$$

$$+\frac{cL_0}{\lambda}(2+\|x_0\|+\|y_0\|)+\varepsilon(\|x_0\|+\|y_0\|). \quad (1.65)$$

由于$0<m<\frac{\lambda}{L_0C_0^2}$，故知存在常数$C_1\geqslant 0$，使对任何的$(x, y)\in X\times X$，有

$$\left(1-\frac{L_0C_0^2m}{\lambda}\right)(\langle x\rangle^m+\langle y\rangle^m)$$
$$-\frac{L_0C_0^2m}{\lambda}(\langle x\rangle^{m-1}+\langle y\rangle^{m-1})\geqslant -C_1.$$

从而，(1.65)式可化为(注意$\|x_0\|$，$\|y_0\|\leqslant R_\alpha$)

$$v(x)-\hat{v}(x)-2\alpha\langle x\rangle^m+\langle p_\varepsilon, x\rangle+\langle q_\varepsilon, x\rangle$$
$$\leqslant\frac{2L_0C_0^2}{\lambda}\cdot\frac{\|x_0-y_0\|^2}{\varepsilon}+\frac{L}{\lambda}\|x_0-y_0\|^\delta$$
$$+\alpha C_1+2\varepsilon\left[\frac{L_0}{\lambda}(1+R_\alpha)+R_\alpha\right]. \quad (1.66)$$

先令$\varepsilon\to 0$，则得(注意(1.61)式)

$$v(x)-\hat{v}(x)-2\alpha\langle x\rangle^m\leqslant\alpha C_1, \quad (1.67)$$

然后令$\alpha\to 0$，得到

$$v(x)\leqslant\hat{v}(x),\ \forall x\in X, \quad (1.68)$$

利用$v(\cdot)$和$\hat{v}(\cdot)$地位的对称性，最终得到(1.51)式。

上述定理的证明与第三章中定理2.1的证明很相似。不同之处是仔细地处理了由于空间维数的无限性带来的一些问题。利用此定理，马上可以得到下述的定理。

定理1.16 设X为自反Banach空间，(H1)～(H4)成立。则问题C^μ的值函数$v^\mu(\cdot)$是方程(1.40)的唯一的粘性解。

综合命题1.6和定理1.16，为解决问题C，可以先求解问题C^μ。从理论上讲，问题C^μ的值函数可由方程(1.40)唯一确定，然后，通过取极限，可以得到原问题C的值函数

$v(\cdot)$。

对于有限时区问题，也可以建立类似的理论。由于基本思想是一致的，我们略去了具体的细节。

§2 无限维最优转换与脉冲控制问题

本节将讨论无限维无限时区的最优转换与脉冲控制问题。由于在第二章中已经接触过有限维的相应问题，为了避免不必要的重复，故在这里叙述该问题时，先从有关假设开始。

(H1)′ 设 X 为 Banach 空间，$\Lambda=\{1, 2, \cdots, m\}$，再设 $K\subset X$ 为具有下述性质的集合：

$$\overline{K}=K,\ \xi_1,\ \xi_2\in K\Rightarrow\xi_1+\xi_2\in K. \tag{2.1}$$

且对任何 $r>0$，$K\cap B_r(0)$ 是 X 中的紧集，此处，$B_r(0)$ 为以 0 为中心，以 $r>0$ 为半径的闭球。

(H2)′ 算子 A：$\mathscr{D}(A)\subset X\to X$ 生成 X 上的一个 C_0 类算子半群 e^{At}，且(不妨设)存在 $\hat{L}\geqslant1$，$\omega\in\boldsymbol{R}$，使得

$$\|e^{At}\|\leqslant\hat{L}e^{\omega t},\ t\geqslant0. \tag{2.2}$$

(H3)′ 映照 f：$X\times\Lambda\to X$，f^0：$X\times X\to\boldsymbol{R}$ 是连续的，且存在常数 $L>0$ 以及 $0<\delta\leqslant1$，$0\leqslant\sigma<1$，使得对任何 x，$\hat{x}\in X$，$d\in\Lambda$，

$$\|f(x,\ d)-f(\hat{x},\ d)\|\leqslant L\|x-\hat{x}\|, \tag{2.3}$$

$$\|f(x,\ d)\|\leqslant L(1+\|x\|), \tag{2.4}$$

$$|f^0(x,\ d)-f^0(\hat{x},\ d)|\leqslant L\|x-\hat{x}\|^\delta, \tag{2.5}$$

$$-L\leqslant f^0(x,\ d)\leqslant L(1+\|x\|^\sigma). \tag{2.6}$$

(H4)′ 映照 k：$\Lambda\times\Lambda\to\boldsymbol{R}^+=[0,\ \infty)$ 满足下述条件：$\forall$ d，$\hat{d}$，$\tilde{d}\in\Lambda$，$d\neq\hat{d}\neq\tilde{d}$，均有

$$k(d, \tilde{d}) < k(d, d') + k(d', \tilde{d}), \tag{2.7}$$

$$k(d, d) = 0, \tag{2.8}$$

$$\min_{d \neq \tilde{d}} k(d, \tilde{d}) = k_0 > 0. \tag{2.9}$$

(H5)′ 映照 $l: X \to \boldsymbol{R}^+$ 是连续的，且存在严格增加的连续函数 $\varpi(\cdot): \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, $\varpi(0) = 0$, 使得

$$|l(\xi) - l(\underline{\xi})| \leqslant (l(\xi) + l(\underline{\xi}))\varpi(\|\xi - \underline{\xi}\|),$$

$$\forall \xi, \underline{\xi} \in K, \tag{2.10}$$

$$l(\xi + \underline{\xi}) < l(\xi) + l(\underline{\xi}), \ \forall \xi, \underline{\xi} \in K, \tag{2.11}$$

$$\inf_{\xi \in K} l(\xi) \equiv l_0 > 0. \tag{2.12}$$

可见，映照 k 与第二章中遇到的是相同的，而 l 有所不同，在有限维情形时，仅要求 l 连续，而此处，要求了更强一点的连续性。另外，(H3)′ 的(2.5)和(2.6)式中 δ 和 σ 可以不一样。$\sigma = 0$ 时，(2.6)与(1.7)式相同，而假设(H2)′ 即为本章 §1 中 (H1)。值得注意的是，我们将不假设本章 §1 中的 (H3)。因而，对我们的问题来说，系统可以是一般双曲型的。

(H6)′ 设 $\lambda > 0$, 使得

$$0 \leqslant \sigma(\omega + \hat{L}L) \leqslant \lambda \leqslant \omega + \hat{L}L, \tag{2.13}$$

且

$$\sup_{\xi \in X} \frac{\|\xi\|^{\frac{\lambda}{\omega + \hat{L}L}}}{l(\xi)} \equiv \alpha_0 < \infty. \tag{2.14}$$

此处的 ω, $\hat{L}$, L 是(H2)′ 和(H3)′ 中给出的。

上面的(H6)′ 给出了映照 l, f, f^0 以及算子半群 e^{At} 之间的匹配关系。在(2.13)式中，不妨假设 $\omega + \hat{L}L > 0$, 否则可以增大 L 或 $\hat{L}$。另外，易见，当 $\sigma = 0$ 时，总可取 $\lambda > 0$ 足够小，使得(2.13)式成立。从而，(H6)′ 意味着 $l(\cdot)$ 应以$\|\xi\|$的某个

幂次的速度趋于无穷。这是非常合理的。

现在，引入控制集合。对于 $d\in\Lambda$，定义

$$\mathscr{A}^d=\{d(\cdot)=\sum_{i\geq1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)；$$
$$[0,\infty)\to\Lambda\,|\,d_0=d,\ \theta_0=0,$$
$$\theta_i\in[0,\infty],\ \forall\ i\geq1;\ d_{i+1}\neq d_i,$$
$$\theta_{i+1}<\infty;\ \sum_{i\geq1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}<\infty\}.$$

$$\mathscr{X}=\xi(\cdot)=\sum_{j\geq1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}:\ [0,\infty)\to X\,|\,\tau_j\in[0,\infty],$$

$$\forall\ j\geq1;\ \tau_j\uparrow+\infty\}.$$

$$\mathscr{K}=\{\xi(\cdot)=\sum_{j\geq1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{X}\,|\,\xi_j\in\mathbf{K},$$
$$\forall\ j\geq1;\ \sum_{j\geq1}l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}<\infty\}.$$

称任何 $d(\cdot)\in\mathscr{A}^d$ 为容许转换控制，$\xi(\cdot)\in\mathscr{X}$ 为脉冲控制，而 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}$ 为容许脉冲控制。类似于第二章§4，我们已将转换控制 $d(\cdot)=\{d_i,\theta_i\}_{i\geq1}$ 与

$$d(\cdot)=\sum_{i\geq1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)$$

作了等同。在讨论有限维情形时，并没有引入相应的 $\mathscr{X}$，这是处理现在的无限维情形的一个有用的桥梁。

对于任何给定的 $(x,d)\in X\times\Lambda$ 以及 $(d(\cdot),\ \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{X}$，形式地考虑下述的发展方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dot{y}_x(t)=Ay_x(t)+f(y_x(t),\ d(t))+\dot{\xi}(t),\ t\geq0,\\ y_x(0)=x,\end{cases}\tag{2.15}$$

上述方程被理解为下面的积分方程：

$$y_x(t)=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-s)}f(y_x(s),\ d(s))\mathrm{d}s$$

$$+\sum_{\tau_j<t} e^{A(t-\tau_j)}\xi_j$$

$$= e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} f(y_x(s), d(s))\mathrm{d}s$$

$$+\sum_{j\geqslant 1} e^{A(t-\tau_j)}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(t),\ t\in[0,\infty). \tag{2.16}$$

这里，$\xi(\cdot)=\sum_{j\geqslant 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)$。显见，在条件(H2)′、(H3)′下，对任何$(x,d)\in X\times\Lambda$，$(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{X}$，积分方程(2.16)存在唯一的解$y_x(\cdot)$。在点$t=\tau_j$，有

$$y_x(\tau_j+0)=y_x(\tau_j)=y_x(\tau_j-0)+\xi_j,\ j\geqslant 1. \tag{2.17}$$

因此，τ_j是轨线的跳跃点，而ξ_j为跃度。现在，对(2.16)式的轨线略作讨论。

命题 2.1 设

$$d(\cdot)\in\mathscr{A}^d,\ \xi(\cdot)=\sum_{j\geqslant 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot),$$

$$\bar{\xi}(\cdot)=\sum_{j\geqslant 1}\bar{\xi}_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{X},\ x,\ \bar{x}\in X,$$

设$y(\cdot)$和$\bar{y}(\cdot)$分别为对应于$(d(\cdot),\xi(\cdot),x)$和$(d(\cdot),\bar{\xi}(\cdot),\bar{x})$的(2.16)式的轨线，则对任何$t\geqslant 0$，

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\|\leqslant \hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\{\|x-\bar{x}\|$$

$$+\sum_{j\geqslant 1} e^{-(\omega+\hat{L}L)\tau_j}\|\xi_j-\bar{\xi}_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\}. \tag{2.18}$$

证 由(2.16)以及(H2)′、(H3)′可得

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\|\leqslant \hat{L}e^{\omega t}\|x-\bar{x}\|$$

$$+\hat{L}\sum_{j\geqslant 1} e^{\omega(t-\tau_j)}\|\xi_j-\bar{\xi}_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)$$

$$+\hat{L}L\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|y(s)-\bar{y}(s)\|\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0, \tag{2.19}$$

从而

$$e^{-\omega t}\|y(t)-\bar{y}(t)\|\leqslant\hat{L}\|x-\bar{x}\|$$
$$+\hat{L}\sum_{j\geq 1}e^{-\omega\tau_j}\|\xi_j-\bar{\xi}_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)$$
$$+\hat{L}L\int_0^t e^{-\omega s}\|y(s)-\bar{y}(s)\|\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0. \tag{2.20}$$

因此由第一章引理 2.5 知

$$e^{-\omega t}\|y(t)-\bar{y}(t)\|\leqslant\hat{L}\|x-\bar{x}\|$$
$$+\hat{L}\sum_{j\geq 1}e^{-\omega\tau_j}\|\xi_j-\bar{\xi}_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)$$
$$+\int_0^t\hat{L}Le^{\hat{L}L(t-s)}\{\hat{L}\|x-\bar{x}\|$$
$$+\hat{L}\sum_{j\geq 1}e^{-\omega\tau_j}\|\xi_j-\bar{\xi}_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(s)\}\mathrm{d}s$$
$$=\hat{L}e^{\hat{L}Lt}\{\|x-\bar{x}\|$$
$$+\sum_{j\geq 1}e^{-\omega\tau_j}e^{-\hat{L}L\tau_j}\|\xi_j-\bar{\xi}_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\}.$$

由此，立刻得到(2.18)式。

推论 2.2 对任何

$$d(\cdot)\in\mathscr{A}^d,\ \xi(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{X},\ x\in X,\ t\geqslant 0,$$

$$\|y_x(t)\|\leqslant\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\{\|x\|$$
$$+Lt+\sum_{j\geq 1}e^{-(\omega+\hat{L}L)\tau_j}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\}. \tag{2.21}$$

证 取 $\bar{x}=0,\bar{\xi}_j=0,\ \forall j\geqslant 1$. 设 $\bar{y}(\cdot)$ 为对应的(2.16)式的解，则可知

$$\|\bar{y}(t)\|\leqslant\hat{L}L\int_0^t e^{\omega(t-s)}(1+\|\bar{y}(s)\|)\mathrm{d}s,\quad t\geqslant 0. \tag{2.22}$$

故知

$$e^{-\omega t}\|\bar{y}(t)\|\leqslant\hat{L}L\int_0^t e^{-\omega s}\,ds+\hat{L}L\int_0^t e^{-\omega s}\|\bar{y}(s)\|\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0. \tag{2.23}$$

由第一章引理 2.5，可得

$$e^{-\omega t}\|\bar{y}(t)\|\leqslant\hat{L}L\int_0^t e^{-\omega s}\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t \hat{L}Le^{\hat{L}L(t-s)}\left[\hat{L}L\int_0^s e^{-\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s$$

$$=\hat{L}L\int_0^t e^{\hat{L}L(t-s)}e^{-\omega s}\mathrm{d}s.$$

从而，

$$\|\bar{y}(t)\|\leqslant\hat{L}L\int_0^t e^{(\omega+\hat{L}L)s}\mathrm{d}s\leqslant\hat{L}L\,te^{(\omega+\hat{L}L)t},\ t\geqslant 0. \tag{2.24}$$

于是，由命题 2.1 知，

$$\|y_x(t)\|\leqslant\|\bar{y}(t)\|+\|y_x(t)-\bar{y}(t)\|$$

$$\leqslant\hat{L}\,e^{(\omega+\hat{L}L)t}\{\|x\|+L\,t+\sum_{j\geqslant 1}e^{-(\omega+\hat{L}L)\tau_j}$$

$$\cdot\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\}.$$

引入下述的目标泛函：对任何

$$(x,d)\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{\Lambda},\ (d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{K},$$

定义

$$J_x^d(d(\cdot),\xi(\cdot))=\int_0^\infty f^0(y_x(t),d(t))e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$+\sum_{i\geqslant 1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}$$

$$+\sum_{j\geqslant 1}l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}. \tag{2.25}$$

下面的命题是必须的。

命题 2.3 在条件(H2)′、(H3)′和(H6)′下，对任何$(x,d)\in X\times\Lambda$，$(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{K}$，(2.25) 式是有意义的。

证 由$\mathscr{A}^d$和$\mathscr{K}$的定义知，当

$$d(\cdot)\in\mathscr{A}^d,\ \xi(\cdot)\equiv\sum_{j\geq1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\ \cdot)}(\cdot)\in\mathscr{K}$$

时，(2.25)式右端的第二、三项是有意义的。因此，只要说明(2.25)式右端的积分是收敛的。由(2.6)和(2.21)式知

$$\begin{aligned}|f^0(y_x(t),d(t))|&\leqslant L[1+\|y_x(t)\|^\sigma]\\&\leqslant L+L\hat{L}^\sigma e^{\sigma(\omega+\hat{L}L)t}\{\|x\|^\sigma\\&\quad+L^\sigma t^\sigma+[\sum_{j\geq1}e^{-(\omega+\hat{L}L)\tau_j}\\&\quad\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\cdot)}(t)]^\sigma\}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

注意到(由(2.13)、(2.14)式)

$$\begin{aligned}[\sum_{j\geq1}e^{-(\omega+\hat{L}L)\tau_j}\|\xi_j\|]^\sigma&\leqslant[\sum_{j\geq1}e^{-\lambda\tau_j}\|\xi_j\|^{\frac{\lambda}{\omega+\hat{L}L}}]^{\frac{\sigma(\omega+\hat{L}L)}{\lambda}}\\&\leqslant[\sum_{j\geq1}e^{-\lambda\tau_j}l(\xi_j)]^{\frac{\sigma(\omega+\hat{L}L)}{\lambda}}\\&\quad\cdot\alpha_0^{-\frac{\sigma(\omega+\hat{L}L)}{\lambda}}<\infty,\end{aligned}\tag{2.27}$$

因此，再注意到$\sigma(\omega+\hat{L}L)<\lambda$，可知(2.25)式右端的积分是收敛的。

这样，便可叙述下面的问题了。

问题 SI　对给定的$(x,d)\in X\times\Lambda$，寻找

$$(d^*(\cdot),\xi^*(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{K},$$

使得

$$J_x^d(d^*(\cdot),\xi^*(\cdot))=\inf_{\mathscr{A}^d\times\mathscr{K}}J_x^d(d(\cdot),\xi(\cdot))\equiv v^d(x).\tag{2.28}$$

称函数$v(\cdot)\equiv(v^1(\cdot),\cdots\cdots,v^m(\cdot))$为问题SI的值函数。对于此值函数，容易证明下述命题：

命题 2.4　设(H1)′～(H6)′成立，则值函数满足下述条件：

$$-\frac{L}{\lambda}\leqslant v^d(x)\leqslant C_0(1+\|x\|^\sigma),\quad \forall(x,d)\in X\times\Lambda, \tag{2.29}$$

$$|v^d(x)-v^d(\hat{x})|\leqslant C_1(1+\|x\|^\sigma+\|\hat{x}\|^\sigma)\|x-\hat{x}\|^\eta,\quad \forall(x,d)\in X\times\Lambda, \tag{2.30}$$

此处，

$$C_0=C_0(L,\hat{L},\lambda,\delta,\omega,\sigma),$$

$$0<\eta<\min\left\{\delta,\ \frac{\lambda-\sigma(\omega+\hat{L}L)}{\omega+\hat{L}L}\right\},$$

而 $$C_1=C_1(L,\hat{L},\lambda,\delta,\omega,\sigma,\eta).$$

然后，有下面的最优性原理。

定理 2.5 设(H1)′～(H6)′成立，则值函数 $v(\cdot)$ 满足下述的最优性原理：$\forall(x,d)\in X\times\Lambda$，

$$v^d(x)\leqslant\min\{M^d[v](x),N[v^d](x)\}, \tag{2.31}$$

$$v^d(x)\leqslant\int_0^t f^0(y_x(s),d)e^{-\lambda s}ds+v^d(y_x(t))e^{-\lambda t},\ t\geqslant 0, \tag{2.32}$$

此处，$y_x(\cdot)$ 是下述方程之解，

$$y_x(t)=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-s)}f(y_x(s),d)\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0. \tag{2.33}$$

而算子 M^d 和 N 由下式给出：

$$\begin{cases} M^d[v](x)=\min\limits_{\tilde{d}\neq d}\{v^{\tilde{d}}(x)+k(d,\tilde{d})\}, \\ N[v^d](x)=\inf\limits_{\xi\in K}\{v^d(x+\xi)+l(\xi)\}. \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\forall(x,d)\in X\times\Lambda.$$

进一步，若在某点 x_0，(2.31)式成立严格不等号，则存在 $t_0>0$，使得

$$v^d(x_0)=\int_0^t f^0(y_{x_0}(s),d)e^{-\lambda s}\mathrm{d}s+v^d(y_{x_0}(t))e^{-\lambda t},$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{2.35}$$

此处，$y_{r_0}(\cdot)$由(2.33)式决定($x = x_0$)。

该定理的证明与有限维的情形基本相同. 利用此定理，可立即得到下面结果。

定理 2.6 设值函数 $v(\cdot)$是 C^1 的，则它满足下述的HJB方程：

$$\begin{cases} \max\{\lambda v^d(x) - \langle Dv^d(x), Ax + f(x, d)\rangle - f^0(x, d), \\ v^d(x) - M^d[v](x), v^d(x) - N[v^d](x)\} = 0, \end{cases}$$
$$(x, d) \in \mathscr{D}(A) \times \Lambda. \tag{2.36}$$

(2.36)式中，$x \in \mathscr{D}(A)$，因为A不是全定义的. 正如第二章中所述，上面定理 2.6 完全是形式的，因为我们无法期望值函数是 C^1 的。

与有限维的情形类似，当值函数 $v(\cdot)$已求得时，可以据此构造出一个最优控制 $(d^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$。因此，问题归结到怎样将值函数找出来。其思想与 §1 一样，试图正则化原控制问题，然后证明正则化问题的值函数收敛于原问题的值函数，并且正则化问题的值函数是相应的 HJB 方程唯一的粘性解。

由于不作类似于 §1 中(H3)的假设，故为证明类似于 §1 的结果是有一定难度的。我们将在下节中来详细讨论问题 SI 的正则化。在结束本节之前，再给出一些值函数 $v(\cdot)$的性质，这些结果将有助于下一节的讨论。

命题 2.7 设(H1)$'$～(H6)$'$ 成立，令

$$\begin{cases} \mathscr{A}_r^d = \Big\{ d(\cdot) = \sum\limits_{i \geq 1} d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1}, \theta_i)}(\cdot) \in \mathscr{A}^d \Big| \\ \qquad \sum\limits_{i \geq 1} k(d_{i-1}, d_i) e^{-\lambda\theta_i} \leqslant \dfrac{L}{\lambda} + C_0(1 + r^\sigma) \Big\}. \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}\mathscr{K}_r=\Big\{\xi(\cdot)-\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{K}\Big|\\ \sum_{j\geq 1}l(\xi_j)\ e^{-\lambda\tau_j}\leq\frac{L}{\lambda}+C_0(1+r^\sigma)\Big\}.\end{aligned}\right.\tag{2.37}$$

此处，C_0 由命题 2.4 给出。则对任何 $(x,d)\in X\times\Lambda$，

$$v^d(x)=\inf_{\mathscr{A}^d_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}}J^d_x(d(\cdot),\xi(\cdot)).\tag{2.38}$$

证 首先易知 $\mathscr{A}^d_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}\neq\varnothing$。今假如

$$(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{K}\backslash(\mathscr{A}^d_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}),$$

则有 $d(\cdot)\in\mathscr{A}^d\backslash\mathscr{A}^d_{\|x\|}$ 或 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}\backslash\mathscr{K}_{\|x\|}$，今设

$$d(\cdot)\in\mathscr{A}^d\backslash\mathscr{A}^d_{\|x\|}.$$

则由(2.6)式知

$$\begin{aligned}\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)&<\sum_{i\geq 1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}\\ &\leq J^d_x(d(\cdot),\ \xi(\cdot))-\int_0^\infty f^0(y_x(t),d(t))e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\\ &\leq J^d_x(d(\cdot),\ \xi(\cdot))+\frac{L}{\lambda}.\end{aligned}$$

故由(2.29)式知

$$J^d_x(d(\cdot),\xi(\cdot))>C_0(1+\|x\|^\sigma)\geq v^d(x).\tag{2.39}$$

因此，这样的 $(d(\cdot),\xi(\cdot))$ 不可能是最优的。同理可证 $\xi(\cdot)\in\mathscr{K}\backslash\mathscr{K}_{\|x\|}$ 的情形。从而得证(2.38)式。

上述的命题告诉我们，对于给定的 $(x,d)\in X\times\Lambda$，为了确定 $v^d(x)$，可以对控制集作限制。而这限制实际上给出了有限时区上转换次数、脉冲次数和脉冲量的上界。关于此点，可以在下述结果中明了。

命题 2.8 对任何

$$d(\cdot)=\sum_{i\geq 1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)\in\mathscr{A}_r^d$$

和
$$\xi(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{K}_r,$$

均有

$$\hat{i}(t;d(\cdot))=\max\{i\geq 0\mid\theta_i\leq t\}$$
$$\leq\frac{1}{k_0}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+r^\sigma)\right]e^{\lambda t},\ t\geq 0,\tag{2.40}$$

$$\hat{j}(t;\xi(\cdot))=\max\{j\geq 1\mid\tau_j\leq t\}$$
$$\leq\frac{1}{l_0}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+r^\sigma)\right]e^{\lambda t},\ t\geq 0.\tag{2.41}$$

此处 k_0 和 l_0 分别由(2.9)和(2.12)式给出，而 C_0 由命题 2.4 决定。

证 由定义

$$\frac{L}{\lambda}+C_0(1+r^\sigma)\geq\sum_{i\geq 1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}$$
$$\geq k_0e^{-\lambda t}\hat{i}(t;d(\cdot)),\ t\geq 0,$$

故得到(2.40)式。同理可证(2.41)式。

命题 2.9 设 $\xi(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{K}_r$，则

$$|\xi_j|^{\frac{\lambda}{\omega+l\hat{L}}}\leq\alpha_0e^{\lambda t}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+r^\sigma)\right],$$
$$\forall j\leq\hat{j}(t;\xi(\cdot)),\ t\geq 0.\tag{2.42}$$

证 利用 $\mathscr{K}_r$ 的定义以及(2.14)式即得(2.42)式。

§3 控制问题的正则化

本节将给出类似于 §1 的正则化问题，证明正则化问题的值函数收敛于原问题的值函数。先设 (H1)′～(H6)′ 成

立。

引理 3.1 对任何 $\eta>0$，存在可列集 $K^\eta\subset K$，使得对任何的 $r>0$，集合 $\{\xi\in K^\eta \mid l(\xi)\leqslant r\}$ 是一个有限集，且

$$\{\xi\in K \mid l(\xi)\leqslant r\}=\bigcup\{\mathcal{O}_\eta(\xi) \mid \xi\in K^\eta,\ l(\xi)\leqslant r+\eta\},\tag{3.1}$$

此处，$\mathcal{O}_\eta(\xi)$ 是 X 中以 ξ 为中心，以 η 为半径的开球。

证 对于 $\eta>0$，显然有下述包含关系：

$$\begin{aligned}&\{\xi\in K \mid k\eta\leqslant l(\xi)\leqslant(k+1)\eta\}\\ &\subset\bigcup\{\mathcal{O}_\eta(\xi) \mid k\eta\leqslant l(\xi)\leqslant(k+1)\eta,\ \xi\in K\},\ k\geqslant 0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

则由 K 的局部紧性(即 $K\cap B_r(0)$ 是紧的，$\forall r>0$)，$l(\cdot)$ 的连续性以及(2.14)式可知(3.2) 式的左端是 X 中的一个紧集。从而，由紧性定义可知，存在有限个点 $\xi_1^k,\ \xi_2^k,\ \cdots\cdots,\ \xi_{i_k}^k\in K$，使得

$$\begin{cases}k\eta\leqslant l(\xi_i^k)\leqslant(k+1)\eta,\ \forall 1\leqslant i\leqslant i_k,\\ \{\xi\in K \mid k\eta\leqslant l(\xi)\leqslant(k+1)\eta\}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{i_k}\mathcal{O}(\xi_i^k),\ k\geqslant 0.\end{cases}\tag{3.3}$$

于是，只要取 $K^\eta=\{\xi_i^k \mid 1\leqslant i\leqslant i_k,\ k\geqslant 0\}$ 即可。

对于给定的 $\eta>0$，上述的 K^η 未必是唯一的。在下面的讨论中，对每个 $\eta>0$，总取定一个 K^η 满足上述条件。

引理 3.2 对任何 $\varepsilon>0$，存在可列集 $Y_\varepsilon\subset\mathscr{D}(A)$，使得对任何 $r>0$，集合 $\{\tilde{\xi}\in Y_\varepsilon \mid \|\tilde{\xi}\|\leqslant r\}$ 是一个有限集，且

$$\{\xi\in K \mid \|\xi\|\leqslant r\}\subset\bigcup\{\mathcal{O}_\varepsilon(\tilde{\xi}) \mid \tilde{\xi}\in Y_\varepsilon\}.\tag{3.4}$$

该引理的证明与引理 3.1 的基本相同，我们留给读者去证明。

本节中的一个非常重要的结果是下述的逼近引理，它本

质上给出了由 $\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$ 所决定的轨线全体的某种局部紧性。为叙述和证明该结果，引入一些辅助控制集合。设 $\eta_0>0$ 给定，$\eta\in(0,\eta_0]$。设 K^η 为引理 3.1 中所决定的 K 的可列子集。定义

$$\mathscr{A}^{d}_{r}(\eta)=\{\hat{d}(\cdot)=\sum_{i\geq1}\hat{d}_{i-1}\chi_{[\hat{\theta}_{i-1},\hat{\theta}_i)}(\cdot)\in\mathscr{A}^{d}_{r}\,|\,\hat{\theta}_i\in\{0,\eta,2\eta,\cdots\},\ \forall i\geq0\},\tag{3.5}$$

$$\mathscr{K}_r(\eta)=\{\hat{\xi}(\cdot)=\sum_{j\geq1}\hat{\xi}_j\chi_{[\hat{\tau}_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{K}_r\,|\,\hat{\tau}_j\in\{0,\eta,2\eta,\cdots\},\ \forall j\geq1;\ \hat{\xi}_j\in K^\eta,\ \forall j\geq1;\ \sum_{j\geq1}l(\hat{\xi}_j)e^{-\lambda\hat{\tau}_j}\leq\left(1+\frac{\eta}{l_0}\right)\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+r^\sigma)\right]\}.\tag{3.6}$$

此处，$r>0$。

上面的两个控制集合是非常特殊的，例如

$$\hat{d}(\cdot)\in\mathscr{A}^{d}_{r}(\eta),$$

它的转换点是 η 的倍数，是有规则的，更重要的是对任何 $T>0$，集合

$$\{(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))|_{[0,T]}\,|\,(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{r}(\eta)\times\mathscr{K}_r(\eta)\}\tag{3.7}$$

是一个有限集！为此，才使下面的逼近引理显得非常有用。

定理 3.3 （逼近引理） 设

$$0<\eta\leq\eta_0,\ 1\geq\varepsilon>0,\ (x,d)\in X\times\Lambda.$$

则对任何的 $(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$，存在

$$(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}(\eta)\times\mathscr{K}_{\|x\|}(\eta),$$

使得对应的 (2.16) 式的轨线 $y_x(\cdot)$ 和 $\hat{y}_x(\cdot)$ 满足

$$\|y_x(t)-\hat{y}_x(t)\|\leq C(t)[\varepsilon+\sum_{j\geq1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)]+C_*(t)\eta,\ \forall t\geq0.\tag{3.8}$$

此处，$C(t)$不依赖于ε，η和$(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$，而$C_{s}(t)$不依赖于$\eta$和$(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$，(3.8)式中$\{\tau_j\}$和$\{\hat{\tau}_j\}$分别是$\xi(\cdot)$和$\hat{\xi}(\cdot)$相应的跳跃点，$\tau_j\leqslant\hat{\tau}_j$，$\forall j\geqslant 1$。

证 设

$$d(\cdot)=\sum_{i\geqslant 1}d_{i-1}\chi_{[\theta_{i-1},\theta_i)}(\cdot)\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|},$$

$$\xi(\cdot)=\sum_{j\geqslant 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|}.$$

定义
$$\hat{d}(\cdot)=\sum_{i\geqslant 1}\hat{d}_{i-1}\chi_{[\hat{\theta}_{i-1},\hat{\theta}_i)}(\cdot)$$

和
$$\hat{\xi}(\cdot)=\sum_{j\geqslant 1}\hat{\xi}_j\chi_{[\hat{\tau}_j,\infty)}(\cdot)$$

如下：

$$0\leqslant\hat{\theta}_i-\theta_i<\eta,\ \hat{\theta}_i\in\{0,\ \eta,\ 2\eta,\ \cdots\cdots\},\ \forall i\geqslant 0,\tag{3.9}$$

$$0\leqslant\hat{\tau}_j-\tau_j<\eta,\ \hat{\tau}_j\in\{0,\ \eta,\ 2\eta,\ \cdots\cdots\},\ \forall j\geqslant 1,\tag{3.10}$$

$$\hat{d}_i=d_i,\ \forall i\geqslant 0,\tag{3.11}$$

$$\hat{\xi}_j\in K^{\eta},\ \|\hat{\xi}_j-\xi_j\|\leqslant\eta,\ l(\hat{\xi}_j)\leqslant l(\xi_j)+\eta,\ \forall j\geqslant 1\tag{3.12}$$

由引理3.1知，(3.12)式是可以办到的（只要取$r=l(\xi_j)$即可）。于是，有

$$\sum_{i\geqslant 1}k(\hat{d}_{i-1},\hat{d}_i)e^{-\lambda\hat{\theta}_i}\leqslant\sum_{i\geqslant 1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}$$
$$\leqslant\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^{\sigma}),\tag{3.13}$$

$$\sum_{j\geqslant 1}l(\hat{\xi}_j)e^{-\lambda\hat{\tau}_j}\leqslant\sum_{j\geqslant 1}(l(\xi_j)+\eta)e^{-\lambda\tau_j}$$
$$\leqslant\left(1+\frac{\eta}{l_0}\right)\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^{\sigma})\right],\tag{3.14}$$

因此，$(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}(\eta)\times\mathscr{K}_{\|x\|}(\eta)$。

我们将证明这对控制就是所需要的。为此，还得引进另外两个辅助脉冲控制：

$$\tilde{\xi}(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(\cdot),\ \hat{\xi}(\cdot)=\sum_{j\geq 1}\tilde{\xi}_j\chi_{[\hat{\tau}_j,\infty)}(\cdot), \tag{3.15}$$

其中，$\hat{\tau}_j$ 由(3.10)式决定，而 $\xi_j\in Y_*$，$\forall j\geq 1$，满足

$$\|\xi_j-\tilde{\xi}_j\|<\varepsilon,\ \forall j\geq 1. \tag{3.16}$$

由引理 3.2 知上述的 ξ_j 是存在的。现在，令 $y_x(\cdot)$，$\hat{y}_x(\cdot)$，$\tilde{y}_x(\cdot)$ 和 $\hat{\tilde{y}}_x(\cdot)$ 分别为 (2.16) 对应于 $(d(\cdot),\xi(\cdot))$，$(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))$，$(d(\cdot),\tilde{\xi}(\cdot))$ 和 $(\hat{d}(\cdot),\tilde{\xi}(\cdot))$ 的解，则有

$$\|y_x(t)-\hat{y}_x(t)\|\leq\|y_x(t)-\tilde{y}_x(t)\|+\|\tilde{y}_x(t)-\hat{\tilde{y}}_x(t)\|+\|\hat{\tilde{y}}_x(t)-\hat{y}_x(t)\|. \tag{3.17}$$

由命题 2.1 和 2.8，有

$$\begin{aligned}\|y_x(t)-\tilde{y}_x(t)\|&\leq\hat{L}\sum_{j\geq 1}e^{(\omega+\hat{L}L)(t-\tau_j)}\|\xi_j-\tilde{\xi}_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\\&\leq\varepsilon\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\hat{j}(t,\xi(\cdot))\\&\leq\frac{\hat{L}}{l_0}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right]e^{(\omega+\hat{L}L+\lambda)t}\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.18}$$

同理，由(3.12)和(3.16)式可知

$$\begin{aligned}\|\hat{\tilde{y}}_x(t)-\hat{y}_x(t)\|&\leq\hat{L}\sum_{j\geq 1}e^{(\omega+\hat{L}L)(t-\hat{\tau}_j)}\|\xi_j-\tilde{\xi}_j\|\chi_{[\hat{\tau}_j,\infty)}(t)\\&\leq(\varepsilon+\eta)\hat{L}\,e^{(\omega+\hat{L}L)t}\hat{j}(t;\hat{\xi}(\cdot))\\&\leq\frac{\hat{L}}{l_0}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right]e^{(\omega+\hat{L}L+\lambda)t}\\&\quad\cdot(\varepsilon+\eta).\end{aligned} \tag{3.19}$$

此处，用到以下事实：$\hat{j}(t;\hat{\xi}(\cdot))\leq\hat{j}(t;\xi(\cdot))$，这是由于(3.10)式蕴含在 $[0,t]$ 上 $\hat{\xi}(\cdot)$ 的脉冲次数不超过 $\xi(\cdot)$ 的脉冲次数。现在，估计(3.17)式右端的第二项。由 (2.16)式，有

$$\|\tilde{y}_x(t)-\hat{\tilde{y}}_x(t)\|\leq\hat{L}L\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|\tilde{y}_x(s)-\hat{\tilde{y}}_x(s)\|ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\hat{L}\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f(\tilde{y}_x(s),d(s))\\
&-f(\tilde{y}_x(s),\hat{d}(s))\|ds\\
&+\sum_{j\geq 1}\hat{L}e^{\omega(t-\tau_j)}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)\\
&+\sum_{j\geq 1}\hat{L}e^{\omega(t-\hat{\tau}_j)}\|(e^{A(\hat{\tau}_j-\tau_j)}-I)\xi_j\|\chi_{[\hat{\tau}_j,\infty)}(t).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

记(3.20)式右端的四项分别为I_1、I_2、I_3和I_4。我们来估计后三项。

$$
\begin{aligned}
I_2&=\hat{L}\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f(\tilde{y}_x(s),d(s))-f(\tilde{y}_x(s),\hat{d}(s))\|ds\\
&=\hat{L}\sum_{i\geq 1}\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|f(\tilde{y}_x(s),d_i)\\
&\quad-f(\tilde{y}_x(s),d_{i-1})\|\chi_{(\theta_i,\hat{\theta}_i)}(s)ds\\
&\leqslant 2\hat{L}L\sum_{i\geq 1}\int_0^t e^{\omega(t-s)}[1+\|\tilde{y}_x(s)\|]\chi_{[\theta_i,\hat{\theta}_i)}(s)ds.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

而由推论2.1和命题2.8，2.9以及(3.16)式有

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{y}_x(t)\|&\leqslant\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\{\|x\|+Lt+\sum_{j\geq 1}e^{-(\omega+\hat{L}L)\tau_j}\\
&\qquad\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\}\\
&\leqslant\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\{\|x\|+Lt+\sum_{j\geq 1}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)\\
&\qquad+\varepsilon j(t;\xi(\cdot))\}\\
&\leqslant\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\Big\{\|x\|+Lt\\
&\qquad+\Big(\Big[\alpha_0e^{\lambda t}\Big(\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^{\sigma})\Big)\Big]^{\frac{\omega+\hat{L}L}{\lambda}}\\
&\qquad+1\Big)\hat{j}(t;\xi(\cdot))\Big\}\\
&\leqslant\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\Big\{\|x\|+Lt
\end{aligned}
$$

$$+\left(\left[\alpha_0\, e^{\lambda t}\left(\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right)\right]^{\frac{\omega+\hat{L}L}{\lambda}}+1\right)$$

$$\cdot\frac{1}{l_0}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right]e^{\lambda t}\Big\}$$

$$\equiv \hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\{\cdots\}.$$

则(3.21)式变为

$$I_2\leqslant 2\hat{L}L\sum_{i\geqslant 1}\int_0^t e^{\omega(t-s)}\,[1+\hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)s}\{\cdots\}]\chi_{[\theta_i,\hat{\theta}_i)}(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant 2\hat{L}L\sum_{i\geqslant 1}e^{\omega t}\int_0^t [e^{-\omega s}+\hat{L}e^{\hat{L}Ls}\{\cdots\}\chi_{[\theta_i,\hat{\theta}_i)}(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant e^{\omega t}\zeta_1(t)\eta. \tag{3.22}$$

注意到(3.9)式以及(2.40) 式，这里的 $\zeta_1(t)$还依赖于 $\|x\|$，L，$\hat{L}$，l_0，k_0，α_0，C_0，λ，ω，σ。由(2.42)和(3.16)式可知

$$I_3\equiv\sum_{j\geqslant 1}\hat{L}e^{\omega(t-\tau_j)}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)$$

$$\leqslant\hat{L}e^{\omega t}\sum_{j\geqslant 1}[\|\xi_j\|+\varepsilon]\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)$$

$$\leqslant\hat{L}e^{\omega t}\left\{\alpha_0 e^{\lambda t}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right]\right\}^{\frac{\omega+\hat{L}L}{\lambda}}$$

$$\cdot\sum_{j\geqslant 1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)+\hat{L}\,e^{\omega t}\sum_{j\geqslant 1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)$$

$$\equiv e^{\omega t}\zeta_2(t)\sum_{j\geqslant 1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t). \tag{3.23}$$

易见，$\zeta_2(t)$依赖于$\|x\|$，L，$\hat{L}$，α_0，C_0，λ，ω，σ。最后，估计 I_4。为此，对于给定的$\xi(\cdot)\in\mathscr{K}_{\|x\|}$，由命题2.8 和 2.9 知

$$\|\xi_j\|\leqslant\left\{\alpha_0\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right]\right\}^{\frac{\omega+\hat{L}L}{\lambda}}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\equiv r(t),$$

$$1\leqslant j\leqslant \mathscr{J}(t;\xi(\cdot)), \tag{3.24}$$

因此，

$$\hat{C}_*(t)\equiv\sup\left\{\left\|\frac{e^{As}-I}{s}\tilde{\xi}\right\|;0<s\leqslant\eta_0,\right.$$

$$\left.\xi\in Y_*,\ \|\xi\|\leqslant r(t)\right\}<\infty. \tag{3.25}$$

且有

$$\left\| \frac{e^{As}-I}{s}\ \tilde{\xi}_j \right\| \leqslant \hat{C}_\varepsilon(t),\ \forall s \in (0,\ \eta_0],$$

$$1 \leqslant j \leqslant \hat{J}(t;\ \xi(\cdot)). \tag{3.26}$$

值得注意的是，$\hat{C}_\varepsilon(t)$是不依赖于 $\xi(\cdot)$的！当然，它仍依赖于 $\|x\|$，L，$\hat{L}$，α_0，C_0，λ，ω，σ 以及 ε。于是，有

$$\begin{aligned} I_4 &\equiv \sum_{j\geqslant 1} \hat{L} e^{\omega(t-\hat{\tau}_j)} \| (e^{A(\hat{\tau}_j-\tau_j)} - I)\xi_j \| \chi_{[\hat{\tau}_j,\infty)}(t) \\ &\leqslant \hat{L} e^{\omega t} \eta\, \hat{C}_\varepsilon(t) \hat{J}(t;\xi(\cdot)) \\ &\leqslant e^{\omega t} \hat{C}_\varepsilon(t) \zeta_3(t) \eta. \end{aligned} \tag{3.27}$$

此处，$\zeta_3(t)$ 仅依赖于 $\|x\|$，L，$\hat{L}$，l_0，C_0，λ，ω，σ。结合(3.20)、(3.22)、(3.23)和(3.27)式，得到

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}_x(t) - \hat{\tilde{y}}_x(t)\| \leqslant\ & e^{\omega t}[\zeta_1(t)\eta + \zeta_2(t)\sum_{j\geqslant 1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t) \\ & + \zeta_3(t)\hat{C}_\varepsilon(t)\eta] \\ & + \int_0^t \hat{L} L e^{\omega(t-s)} \|\tilde{y}_x(s) - \hat{\tilde{y}}_x(s)\| \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.28}$$

故有

$$\begin{aligned} & e^{-\omega t}\|\tilde{y}_x(t) - \hat{\tilde{y}}_x(t)\| \\ \leqslant\ & [\zeta_1(t) + \zeta_3(t)\hat{C}_\varepsilon(t)]\eta + \zeta_2(t)\sum_{j\geqslant 1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t) \\ & + \hat{L}L\int_0^t e^{-\omega s}\|\tilde{y}_x(s) - \hat{\tilde{y}}_x(s)\| \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.29}$$

从而由第一章引理 2.5 知

$$\begin{aligned} & e^{-\omega t}\|\tilde{y}_x(t) - \hat{\tilde{y}}_x(t)\| \\ \leqslant\ & [\zeta_1(t) + \zeta_3(t)\hat{C}_\varepsilon(t)]\eta + \zeta_2(t)\sum_{j\geqslant 1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t) \\ & + \int_0^t \hat{L}L e^{\hat{L}L(t-s)}\{[\zeta_1(s) + \zeta_3(s)\hat{C}_\varepsilon(s)]\eta\}\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t \hat{L}L e^{\hat{L}L(t-s)}\zeta_2(s)\sum_{j\geqslant 1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

总可设 $\zeta_1(\cdot)$、$\zeta_2(\cdot)$、$\zeta_3(\cdot)$ 和 $C_s(\cdot)$ 关于 t 是单调增的。因此，由上式可得

$$\|\tilde{y}_x(t)-\hat{y}_x(t)\|\leqslant e^{\omega t}\{e^{\hat{L}Lt}[\zeta_1(t)+\zeta_3(t)\hat{C}_s(t)] + \zeta_2(t)\sum_{j\geq 1} x_{(\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t) + \hat{l}_l L e^{\hat{L}Lt}\zeta_2(t)\hat{J}(t;\xi(\cdot))\eta\}. \tag{3.30}$$

因此，由(3.17)、(3.18)、(3.19)和(3.30)式，得到

$$\begin{aligned}\|y_x(t)-\hat{y}_x(t)\| &\leqslant 2\frac{\hat{l}_l}{l_0}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right]e^{(\omega+\hat{L}L+\lambda)t}\varepsilon \\ &\quad + e^{\omega t}\zeta_2(t)\sum_{j\geq 1}\chi_{(\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t) \\ &\quad + \{e^{(\omega+\hat{L}L)t}[\zeta_1(t)+\zeta_3(t)\hat{C}_s(t) \\ &\quad + \hat{L}Le^{\hat{L}L}\zeta_2(t)\hat{J}(t;\xi(\cdot))] \\ &\quad + \frac{\hat{L}}{l_0}\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\right]e^{(\omega+\hat{L}L+\lambda)t}\}\eta \\ &\leqslant C(t)[\varepsilon+\sum_{j\geq 1}\chi_{(\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)]+C_s(t)\eta.\end{aligned}$$

其中的 $C(t)$ 和 $C_s(t)$ 满足定理要求。

有了上面的结果，便可以来构造逼近问题了。设 $\mu_0\geqslant 0$，$\{A_\mu|\mu\subset\mathscr{M}\}$ 为一族线性有界算子，而 $\mathscr{M}\subset[\mu_0,\infty)$，$\sup\mathscr{M}=+\infty$。与§1中一样，为确定起见，设 $\mathscr{M}=[\mu_0,\infty)$，并设该算子族满足下述条件：

$$\lim_{\mu\to\infty}A_\mu x=Ax,\ \forall x\in\mathscr{D}(A), \tag{3.31}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}e^{A_\mu t}x=e^{At}x,\ \forall x\in X,\ 关于\ t\in[0,T]一致,\forall T>0. \tag{3.32}$$

$$\|e^{A_\mu t}\|\leqslant\hat{L}e^{\omega t},\ \forall t\geqslant 0,\ \mu\geqslant\mu_0. \tag{3.33}$$

易见，条件(3.32)和(3.33)分别与(1.19)和(1.20)式相同，但是(3.31)式要比(1.18)式弱。由第一章§4知，上面的 A_μ

可以取 A 的 Yosida 逼近。因此，不像本章 §1，不需要对系统作进一步的限制。现在，引入下述截断算子：

$$G_\mu(z)=\begin{cases} z, & \|z\|\leqslant\mu, \\ \dfrac{\mu z}{\|z\|}, & \text{否则}。\end{cases} \tag{3.34}$$

此处，G_μ 是定义于某个 Banach 空间 Z 上的，对于不同的 Z，以同样方式可以定义出不同的 G_μ。在记号上我们不去区分它，它的定义空间可由上下文看出。令

$$\begin{cases} A^\mu(x)=A_\mu G_\mu(x),\ \forall x\in X, \\ f_\mu(x,d)=G_\mu(f(x,d)),\ \forall(x,d)\in X\times\Lambda, \\ f_\mu^0(x,d)=G_\mu(f^0(x,d)),\ \forall(x,d)\in X\times\Lambda. \end{cases} \tag{3.35}$$

下面的命题是显然的。

命题 3.4 对任何的 $d\in\Lambda$, $\mu\geqslant\mu_0$, $x,\hat{x}\in X$, 均有

$$\|A^\mu(x)-A^\mu(\hat{x})\|\leqslant 2\|A_\mu\|\|x-\hat{x}\|, \tag{3.36}$$

$$\|A^\mu(x)\|\leqslant\|A_\mu\|(\mu\wedge\|x\|), \tag{3.37}$$

$$\|f_\mu(x,d)-f_\mu(\hat{x},d)\|\leqslant 2L\|x-\hat{x}\|^\delta, \tag{3.38}$$

$$\|f_\mu(x,d)\|\leqslant\mu\wedge[L(1+\|x\|)], \tag{3.39}$$

$$|f_\mu^0(x,d)-f_\mu^0(\hat{x},d)|\leqslant 2L\|x-\hat{x}\|^\delta, \tag{3.40}$$

$$-L\leqslant f_\mu^0(x,d)\leqslant\mu\wedge[L(1+\|x\|^\gamma)]. \tag{3.41}$$

这里，f_μ 的 Lipschitz 常数是 $2L$。考虑下述系统

$$\begin{cases} \dot{y}_x^\mu(t)=A^\mu(y_x^\mu(t))+f_\mu(y_x^\mu(t),d(t))+\dot{\xi}(t), \\ \qquad \text{a. e. } t\geqslant 0, \\ y_x^\mu(0)=x. \end{cases} \tag{3.42}$$

将其理解为

$$y_x^\mu(t)=x+\int_0^t[A^\mu(y_x^\mu(s))+f_\mu(y_x^\mu(s),d(s))]\mathrm{d}s +\xi(t),\ t\geqslant 0. \tag{3.43}$$

需要注意的是，$A^\mu(\cdot)$不是线性的，故 $e^{A^\mu t}$ 是没有意义的。不过，由命题 3.4 知，$A^\mu(\cdot)$是 Lipschitz 连续的。因此，对任何 $(x, d)\in X\times\Lambda$，$(d(\cdot), \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{X}$，(3.43) 存在唯一的解 $y_x^\mu(\cdot)$。于是，我们定义

$$
\begin{aligned}
J_x^{\mu,d}(d(\cdot), \xi(\cdot)) = \int_0^\infty & f_\mu^0(y_x^\mu(t), d(t))e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&+\sum_{i\geq 1} k(d_{i-1}, d_i)e^{-\lambda\theta_i} \\
&+\sum_{j\geq 1} l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

由于此时 $f_\mu^0(\cdot)$是有界的，故只要 $\lambda>0$，对任何$(d(\cdot), \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{X}$，上述目标泛函总是有意义的。下面，叙述正则化问题。

问题 SI_μ 给定$(x, d)\in X\times\Lambda$，寻找$(d^*(\cdot), \xi^*(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{X}$，使得

$$
J_x^{\mu,d}(d^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) = \inf_{\mathscr{A}^d\times\mathscr{X}} J_x^{\mu,d}(d(\cdot), \xi(\cdot)) \equiv v_\mu^d(x).
\tag{3.45}
$$

称 $v_\mu(\cdot) = (v_\mu^1(\cdot), \cdots\cdots, v_\mu^m(\cdot))$为问题 SI_μ 的值函数。由于映照 $x\to A^\mu(x)+f_\mu(x, d)$是有界的，Lipschitz 连续的，因此，完全类似于有限维混合控制问题(见第二章 §6)，可得值函数 $v_\mu(\cdot)$ 是有界的，且一致连续的。于是，利用第三章 §5 和本章 §1 的方法，可以按步就班地证明下述结果。

定理 3.5 设(H1)′～(H6)′ 成立，设X为自反的且存在 $r(\cdot)\in C(X)$满足 §1 中(H4)，再设

$$
\max_{d,\tilde{d}\in\Lambda} k(d, \tilde{d}) < l_0 \equiv \inf_{\xi\in K} l(\xi),
\tag{3.46}
$$

则值函数 $v_\mu(\cdot)$ 是下述方程唯一的有界一致连续粘性解。

$$\begin{cases} \max\{\lambda v_\mu^d(x) - \langle Dv_\mu^d(x), A^\mu(x)+f_\mu(x,d)\rangle \\ -f_\mu^0(x,d), \\ v_\mu^d(x)-M^d[v_\mu](x), v_\mu^d(x)-N[v_\mu^d](x)\}=0, \\ (x,d)\in X\times\Lambda. \end{cases} \tag{3.47}$$

此处，算子 M^d 和 N 由 (2.34) 式给出。

该定理的证明与第三章 §5 的有关结果的证明非常类似，唯一不同的地方是要用一次 Stegall 引理(即引理 1.14)。

剩下的问题是期望得到 $v_\mu(x)\to v(x)$, $\forall x\in X$。

命题 3.6 对任何 $(x,d)\in X\times\Lambda$, $T>0$, 以及 $(d(\cdot), \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{K}$, 设 $y_x^\mu(\cdot)$ 和 $y_x(\cdot)$ 分别为 (3.43) 和 (2.16) 对应于 $(d(\cdot), \xi(\cdot), x)$ 的解，则

$$\lim_{\mu\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|y_x^\mu(t)-y_x(t)\|=0. \tag{3.48}$$

证 设 $z_x^\mu(\cdot)$ 为下述辅助方程的唯一解，

$$z_x^\mu(t)=e^{A_\mu t}x+\int_0^t e^{A_\mu(t-s)}f_\mu(z_x^\mu(s), d(s))ds + \sum_{j\geq 1}e^{A_\mu(t-\tau_j)}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(t). \tag{3.49}$$

则类似于推论 2.2, 可知

$$\|z_x^\mu(t)\|\leqslant\mu_1, \ \forall t\in[0,T], \ \mu\geqslant\mu_0. \tag{3.50}$$

从而，对于 $\mu\geqslant\mu_1$, 有

$$A^\mu(z_x^\mu(t))\equiv A_\mu G_\mu(z_x^\mu(t))=A_\mu z_x^\mu(t), \ \forall t\in[0,T]. \tag{3.51}$$

所以，由 (3.49) 式的唯一性(或 (3.43) 式的唯一性)，得到

$$y_x^\mu(t)=z_x^\mu(t), \ \forall t\in[0,T], \ \mu\geqslant\mu_1. \tag{3.52}$$

然后，由 (3.50) 及 (3.39) 式知，存在 $\mu_2\geqslant\mu_1$, 使得

$$f_\mu(z_x^\mu(t), d(t))=f(z_x^\mu(t), d(t)), \ \forall t\in[0,T], \ \mu\geqslant\mu_2, \tag{3.53}$$

因此，当 $\mu\geqslant\mu_2$ 时，对 $t\in[0, T]$，有

$$
\begin{aligned}
\|z_x^\mu(t)-y_x(t)\| \leqslant & \|(e^{A\mu t}-e^{At})x\| \\
& +\left\|\int_0^t [e^{A\mu(t-s)}f_\mu(z_x^\mu(s), d(s)) \right. \\
& \left. - e^{A(t-s)}f(y_x(s), d(s))]\mathrm{d}s\right\| \\
\leqslant & \sup_{0\leqslant r\leqslant T}\|(e^{A\mu r}-e^{Ar})x\| \\
& +\hat{L}L\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|z_x^\mu(s)-y_x(s)\|\mathrm{d}s \\
& +\int_0^T \sup_{0\leqslant r\leqslant T}\|(e^{A\mu r}-e^{Ar})f(y_x(s), d(s))\|\mathrm{d}s \\
& \equiv \psi_T^\mu+\hat{L}L\int_0^t e^{\omega(t-s)}\|z_x^\mu(s)-y_x(s)\|\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

此处，

$$
\begin{aligned}
\psi_T^\mu = & \sup_{0\leqslant r\leqslant T}\|(e^{A\mu r}-e^{Ar})x\| \\
& +\int_0^T \sup_{0\leqslant r\leqslant T}\|(e^{A\mu r}-e^{Ar})f(y_x(s), d(s))\|\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

由条件(3.32)知上式右端第一项趋于0，第二项的被积函数对每个固定的 $s\in[0, T]$ 也趋于0。然后，利用控制收敛定理(即第一章定理1.9)，可知第二项也趋于0。因此，利用Gronwall不等式，可得

$$
\|z_x^\mu(t)-y_x(t)\|\leqslant\psi_T^\mu+\hat{L}L\,\psi_T^\mu\int_0^T e^{(\omega+\hat{L}L)s}\mathrm{d}s\to 0,\ (\mu\to\infty)
\tag{3.56}
$$

关于 $t\in[0, T]$ 一致。再注意到(3.52)式，命题得证。

ψ_T^μ 一般来讲是依赖于 $y_x(\cdot)$ 的，从而，它依赖于 $(d(\cdot),\xi(\cdot))$，因此，直接用此命题不能导出值函数 $v_\mu(\cdot)$ 收敛于 $v(\cdot)$，此时，前面的逼近引理就发挥作用了。

定理 3.7 对任何的 $(x, d)\in X\times \Lambda$，

$$\lim_{\mu\to\infty} v_\mu^d(x) = v^d(x). \tag{3.57}$$

证 只要证明

$$\lim_{\mu\to\infty} |J_x^{\mu,d}(d(\cdot),\xi(\cdot)) - J_x^d(d(\cdot),\xi(\cdot))| = 0 \tag{3.58}$$

关于 $(d(\cdot),\xi(\cdot))\in \mathscr{A}^d_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$ 是一致的。为证明此点，首先说明：

$$\begin{aligned}&\forall t\geqslant 0,\ \mu\geqslant\mu_0,\ (d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{K},\\ &\|y_x^\mu(t)\|\leqslant \hat{L}e^{(\omega+\hat{L}L)t}\Big[\|x\|+Lt\\ &\qquad +\sum_{j\geqslant 1}e^{-(\omega+\hat{L}L)\tau_j}\|\xi_j\|x_{[\tau_j,\infty)}(t)\Big],\end{aligned} \tag{3.59}$$

上式的要点是右端不依赖于 $\mu\geqslant\mu_0$。事实上，对给定的 $(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^d\times\mathscr{K}$，(3.43)存在唯一的解 $y_x^\mu(\cdot)$。置

$$h(t) = 1\wedge\frac{\mu}{\|y_x^\mu(t)\|},\ \forall t\geqslant 0,\ \left(约定\frac{\mu}{0}=\infty\right), \tag{3.60}$$

则易见

$$0<h(t)\leqslant 1,\ \forall t\geqslant 0, \tag{3.61}$$

且有

$$A^\mu(y_x^\mu(t)) = A_\mu G_\mu(y_x^\mu(t)) = h(t)A_\mu y_x^\mu(t), \tag{3.62}$$

因此，(3.43)式可写成

$$\begin{aligned}y_x^\mu(t) = x+\int_0^t [&h(s)A_\mu y_x^\mu(s)\\ &+f_\mu(y_x^\mu(s),d(s))]\mathrm{d}s+\xi(t).\end{aligned} \tag{3.63}$$

记 $z(t)=\int_0^t h(s)A_\mu y_x^\mu(s)\mathrm{d}s$，则有

$$\dot{z}(t)=h(t)A_u y_x^{\mu}(t)$$

$$=h(t)A_u z(t)+h(t)A_u\Big[x$$

$$+\int_0^t f_u(y_x^{\mu}(s),d(s))\mathrm{d}s+\xi(t)\Big] \quad . \tag{3.64}$$

由于，$A_u\in\mathscr{L}(X)$，故 $e^{\pm A_\mu\int_0^t h(r)\mathrm{d}r}$ 是有意义的，因此，由(3.64)式知，

$$\Big[e^{-A_\mu\int_0^t h(r)\mathrm{d}r}z(t)\Big]'=e^{-A_\mu\int_0^t h(r)\mathrm{d}r}A_\mu h(t)$$

$$\Big[x+\int_0^t f_\mu(y_x^{\mu}(s),d(s))\mathrm{d}s$$

$$+\xi(t)\Big]. \tag{3.65}$$

从而，由 $z(0)=0$，可得

$$e^{-A_\mu\int_0^t h(r)\mathrm{d}r}z(t)=\int_0^t e^{-A_\mu\int_0^s h(r)\mathrm{d}r}A_\mu h(s)$$

$$\cdot\Big[x+\int_0^s f_\mu(y_x^{\mu}(r),d(r))\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t e^{-A_\mu\int_0^s h(r)\mathrm{d}r}A_\mu h(s)\xi(s)\mathrm{d}s$$

$$=x-e^{-A_\mu\int_0^t h(r)\mathrm{d}r}$$

$$\cdot\Big[x+\int_0^t f_u(y_x^{\mu}(r),d(r))\mathrm{d}r\Big]$$

$$+\int_0^t e^{-A_\mu\int_0^s h(r)\mathrm{d}r}f_u(y_x^{\mu}(s),d(s))\mathrm{d}s$$

$$+\sum_{j\geq 1}\int_{\tau_j}^t e^{-A_\mu\int_0^s h(r)\mathrm{d}r}A_\mu h(s)\xi_j\mathrm{d}s$$

$$\cdot\chi_{[\tau_j,\infty)}(t).$$

故有

$$z(t)=e^{A_\mu\int_0^t h(r)\mathrm{d}r}x-x-\int_0^t f_\mu(y_x^{\mu}(s),d(s))\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^t e^{A\mu\int_s^t h(r)dr} f_\mu(y_x^\mu(s), d(s))ds$$

$$+\sum_{j\geq 1} e^{A\mu\int_0^t h(r)dr}[e^{-A\mu\int_0^{\tau_j} h(r)dr}$$

$$-e^{-A\mu\int_0^t h(r)dr}]\xi_j\chi_{(\tau_j,\infty)}(t).$$

这样，由(3.63)式知

$$y_x^\mu(t) = e^{A\mu\int_0^t h(r)dr} x$$

$$+\int_0^t e^{A\mu\int_s^t h(r)dr} f_\mu(y_x^\mu(s), d(s))ds$$

$$+\sum_{j\geq 1} e^{A\mu\int_{\tau_j}^t h(r)dr}\xi_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(t). \tag{3.66}$$

注意到(3.61)和(3.33)式，有

$$\|e^{A\mu\int_s^t h(r)dr}\| \leqslant \hat{L}e^{\omega\int_s^t h(r)dr} \leqslant \hat{L}e^{\omega(t-s)}, \tag{3.67}$$

$$\forall t\geqslant s\geqslant 0.$$

因此，再由(3.39)式知

$$\|y_x^\mu(t)\| \leqslant \hat{L}e^{\omega t}\|x\| + \int_0^t \hat{L}e^{\omega(t-s)}L(1+\|y_x^\mu(s)\|)ds$$

$$+\sum_{j\geq 1} Le^{\omega(t-\tau_j)}\|\xi_j\|\chi_{(\tau_j,\infty)}(t),\ t\geqslant 0. \tag{3.68}$$

然后，利用 Gronwall 不等式，类似于命题 2.1 和推论 2.2 的证明，可得到(3.59)式。现在，利用(3.59)和(3.41)式，$\forall\hat{\varepsilon}>0$，存在 $T>0$，使得

$$\begin{cases}\int_T^\infty |f_\mu^0(y_x^\mu(t), d(t))|e^{-\lambda t}dt<\hat{\varepsilon}, \\ \forall(d(\cdot), \xi(\cdot))\in\mathscr{A}_{\|x\|}^d\times\mathscr{K}_{\|x\|},\ \mu\geqslant\mu_0. \\ \int_T^\infty |f^0(y_x^{(t)}, d(t))|e^{-\lambda t}dt<\hat{\varepsilon}, \\ \forall(d(\cdot), \xi(\cdot))\in\mathscr{A}_{\|x\|}^d\times\mathscr{K}_{\|x\|}.\end{cases} \tag{3.69}$$

然后，任取 ε, $\eta>0$，由(3.68)式知，存在 $\mu>0$，使得对给定的

$T>0$ 以及任意的 $(d(\cdot),\ \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{q}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$,

$$\|y^{\mu}_{x}(t)\|\leqslant\bar{\mu},\ \forall\mu\geqslant\mu_0,\ t\in[0,\ T]. \tag{3.70}$$

从而,由 $h(\cdot)$ 的定义知(见(3.60)式),

$$h(t)=1,\ \forall t\in[0,\ T],\ \mu\geqslant\bar{\mu}, \tag{3.71}$$

另一方面,不妨设当 $\mu\geqslant\bar{\mu}$ 时,

$$f_{\mu}(y^{\mu}_{x}(t),\ d(t))=f(y^{\mu}_{x}(t),\ d(t)),$$

$$\forall t\in[0,\ T],\ (d(\cdot),\ \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{q}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}, \tag{3.72}$$

这样,对于 $\mu\geqslant\bar{\mu}$, $(d(\cdot),\ \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{q}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$, $y^{\mu}_{x}(\cdot)$ 在 $[0,\ T]$ 上满足

$$y^{\mu}_{x}(t)=e^{A_\mu t}x+\int_0^t e^{A_\mu(t-s)}f(y^{\mu}_{x}(s),\ d(s))\mathrm{d}s+\sum_{j\geqslant1}e^{A_\mu(t-\tau_j)}\xi_j\chi_{(\tau_j,\infty)}(t). \tag{3.73}$$

因此,完全类似于定理 3.3, 可以找到

$$(\hat{d}(\cdot),\ \hat{\xi}(\cdot))\in\mathscr{A}^{q}_{\|x\|}(\eta)\times\mathscr{K}_{\|x\|}(\eta),$$

使得相应的(3.73)式的解 $\hat{y}^{\mu}_{x}(\cdot)$ 满足

$$\|y^{\mu}_{x}(t)-\hat{y}^{\mu}_{x}(t)\|\leqslant C(t)\Big[\varepsilon+\sum_{j\geqslant1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(t)\Big]+C_0(t)\eta,$$

$$\forall t\in[0,\ T],\ \mu\geqslant\bar{\mu}. \tag{3.74}$$

(3.74)式右端是独立于 $\mu\geqslant\bar{\mu}$ 的,同时,从定理 3.3 知,它也不依赖于 $(d(\cdot),\ \xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{q}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$ 的。于是有

$$\int_0^T|f^0_\mu(y^{\mu}_{x}(s),\ d(s))-f^0_\mu(\hat{y}^{\mu}_{x}(s),\ \hat{d}(s))|e^{-\lambda s}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_0^T|f^0_\mu(y^{\mu}_{x}(s),d(s))-f^0_\mu(y^{\mu}_{x}(s),\hat{d}(s))|e^{\lambda s}\mathrm{d}s$$

$$+\int_0^T|f^0_\mu(y^{\mu}_{x}(s),\ \hat{d}(s))-f^0_\mu(\hat{y}^{\mu}_{x}(s),\hat{d}(s))|e^{-\lambda s}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant2L\int_0^T(1+\|y^{\mu}_{x}(s)\|^{\sigma})e^{-\lambda s}\sum_{j\geqslant1}\chi_{[\tau_j,\hat{\tau}_j)}(s)\mathrm{d}s$$

$$+2L\int_0^T \|y_x^\mu(s)-\hat{y}_x^\mu(s)\|^\delta e^{-\lambda s}\mathrm{d}s \tag{3.75}$$

$$\leqslant 2L\{1+\hat{L}^\sigma e^{\sigma(\omega+\hat{L}L)T}[\|x\|+LT$$

$$+\sum_{j\geqslant 1}\|\xi_j\|\chi_{[\tau_j,\infty)}(T)]^\sigma\hat{i}(T;d(\cdot))\eta$$

$$+2L\{C(T)^\delta T\varepsilon^\delta+C(T)^\delta\hat{J}(T;\xi(\cdot))\eta$$

$$+TC_s(T)^\delta\eta^\delta\}$$

$$\leqslant C_1(T)\varepsilon^\delta+C_2(T)\eta+C_3(T)C_s(T)^{\delta\eta\delta}.$$

上式中的 $C_1(T)$, $C_2(T)$ 和 $C_3(T)$ 均不依赖于

$$(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^4_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$$

以及 $\mu\geqslant\bar{\mu}$. 另一方面，注意到

$$0\leqslant\sum_{i\geqslant 1}k(d_{i-1},d_i)(e^{-\lambda\theta_i}-e^{-\lambda\hat{\theta}_i})$$

$$\leqslant\sum_{i\geqslant 1}k(d_{i-1},d_i)e^{-\lambda\theta_i}\eta \tag{3.76}$$

$$\leqslant[L+\lambda C_0(1+\|x\|^\sigma)]\eta,$$

$$\Big|\sum_{j\geqslant 1}l(\hat{\xi}_j)\,e^{-\lambda\hat{\tau}_j}-\sum_{j\geqslant 1}l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}\Big|$$

$$\leqslant\sum_{j\geqslant 1}|l(\hat{\xi}_j)-l(\xi_j)|\,e^{-\lambda\hat{\tau}_j}$$

$$+\sum_{j\geqslant 1}l(\xi_j)|e^{-\lambda\hat{\tau}_j}-e^{-\lambda\tau_j}|$$

$$\leqslant\sum_{j\geqslant 1}(l(\hat{\xi}_j)+l(\xi_j))\varpi(\|\hat{\xi}_j-\xi_j\|)e^{-\lambda\tau_j}$$

$$+\lambda\sum_{j\geqslant 1}l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}(\hat{\tau}_j-\tau_j) \tag{3.77}$$

$$\leqslant\sum_{j\geqslant 1}(2l(\xi_j)+\eta)e^{-\lambda\tau_j}\varpi(\eta)$$

$$+\lambda\sum_{j\geqslant 1}l(\xi_j)e^{-\lambda\tau_j}\cdot\eta$$

$$\leqslant\Big[\Big(2+\frac{\eta}{l_0}\Big)\varpi(\eta)+\lambda\eta\Big]\Big[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^\sigma)\Big].$$

因此，对 $\mu\geqslant\bar{\mu}$, 得到

$$|J_x^{\mu,d}(d(\cdot),\xi(\cdot))-J_x^{\mu,d}(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))|$$

$$\leqslant 2\hat{\varepsilon}+C_1(T)\varepsilon^{\theta}+C_2(T)\eta+C_3(T)C_{\varepsilon}(T)^{\delta}\eta^{\delta} \qquad (3.78)$$

$$+\left[\left(2+\frac{\eta}{l_0}\right)\bar{\omega}(\eta)+2\lambda\eta\right]\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^{\sigma})\right].$$

所以，$\forall\hat{\varepsilon}>0$，先取 $T>0$，充分大，使得(3.69)式成立，然后取 $\varepsilon>0$ 充分小，使得

$$C_1(T)\varepsilon^{\theta}<\hat{\varepsilon}. \qquad (3.79)$$

再对这样的 $T>0$ 和 $\varepsilon>0$，取 $\hat{\eta}\in(0,\eta_0]$，使得

$$C_2(T)\hat{\eta}+C_3(T)C_{\varepsilon}(T)^{\delta}\hat{\eta}^{\delta}$$

$$+\left[\left(2+\frac{\hat{\eta}}{l_0}\right)\bar{\omega}(\hat{\eta})+2\lambda\hat{\eta}\right]\left[\frac{L}{\lambda}+C_0(1+\|x\|^{\sigma})\right]<\hat{\varepsilon}. \quad (3.80)$$

综上所述，得到下述事实：$\forall\hat{\varepsilon}>0$，存在 $\hat{\eta}\in(0,\eta_0]$，使得对任何 $(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}\times\mathscr{K}_{\|x\|}$，总可找到

$$(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}(\hat{\eta})\times\mathscr{K}_{\|x\|}(\hat{\eta})$$

使得

$$|J^{\mu,d}_x(d(\cdot),\xi(\cdot))-J^{\mu,d}_x(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))|<4\hat{\varepsilon},$$

$$\forall\mu\geqslant\bar{\mu}. \qquad (3.81)$$

同样地，也有

$$|J^{d}_x(d(\cdot),\xi(\cdot))-J^{d}_x(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))|<4\hat{\varepsilon}. \qquad (3.82)$$

另一方面，对给定的 $T>0$ 及 $\hat{\eta}\in(0,\eta_0]$，集合

$$\{(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))|_{[0,T]}\,|\,(\hat{d}(\cdot),\hat{\xi}(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}(\hat{\eta})\times\mathscr{K}_{\|x\|}(\hat{\eta})\}$$

是一个有限集。故由命题 3.6 和 f^0 的连续性知，

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^T|f^0_\mu(\vartheta^{\mu}_x(t),d(t))-f^0(\vartheta_x(t),d(t))|e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=0. \qquad (3.83)$$

关于 $(d(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathscr{A}^{d}_{\|x\|}(\hat{\eta})\times\mathscr{K}_{\|x\|}(\hat{\eta})$ 一致。因此，结合(3.69)、(3.76)、(3.77)、(3.81)和(3.82)式，得到收敛性

(3.58)式关于$(d(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathscr{A}^d_{\|x\|} \times \mathscr{K}^d_{\|x\|}$一致。从而定理得证。

从上面证明中，对应于$\mathscr{A}^d_{\|x\|} \times \mathscr{K}_{\|x\|}$的轨线族在$[0, T]$上的限制是在$L^1(0, T; X)$中完全有界的。这也恰恰是逼近引理所讲的事实，它保证了值函数的收敛性。

§4 Stegall 引理的证明

本节将给出 Stegall 引理的一个证明。我们并不准备全套地搬出与之有关的所有 Banach 空间理论，所以，仅以 Stegall 引理的证明为目标，略去了不必要结论。即便如此，初学者也应跳过此节。将此内容安排于此是为了本书某种程度上的自我完整，因为一般的书上不会将这样的结果单独叙述。这样，为知道该结果的证明需要涉足太多文献而不甚令人满意。

定义 4.1 设X为一个 Banach 空间，(Ω, Σ)为一个可测空间。称$G: \Sigma \to X$为一个向量值测度，如果

$$\begin{cases} G(\phi) = 0, \\ G\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} G(E_i), \ \forall E_i \in \Sigma, \ E_i \cap E_j = \phi, \ i \neq j. \end{cases} \tag{4.1}$$

(注意，上式右端级数是按X中范数强收敛的。)进一步，称G是有界变差的，如果

$$\sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} \|G(E)\| < \infty, \tag{4.2}$$

此处，π为Ω的任何有限分割，即$\pi = \{E_i\}_{i=1}^k$，E_i两两不交，且

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} E_i,$$

k 为某个自然数。若(Ω, Σ, μ)为一个测度空间，则还可以定义G的关于μ的连续性：称G是μ-连续的，如果$\mu(E)=0$导致$G(E)=0$，(对任何$E\in\Sigma$)。

定义 4.2 Banach 空间X称为关于全有限测度空间(Ω, Σ, μ)是具有 RNP 的 (Radon-Nikodým Property)，如果对任何μ-连续的有界变差的向量值测度$G: \Sigma\to X$，均存在一个$g\in L^1(\mu, X)$，使得

$$G(E)=\int_E g d\mu, \ \forall E\in\Sigma. \tag{4.3}$$

如果X关于任何全有限测度空间均具有 RNP，则称X是具有 RNP 的。

利用 Radon-Nikodým 定理，可知$\boldsymbol{R}^n$是具有 RNP 的。上面的定义，实际上就是将无限维空间分成了两类，一类是具有 RNP 的，另一类是不具有 RNP 的。而具有 RNP 的空间将保持许多与$\boldsymbol{R}^n$类似的性质。最重要的一类具有 RNP 的无限维空间是自反 Banach 空间。我们将不在这里证明这个事实。正因为自反 Banach 空间是具有 RNP 的，故具有 RNP 的空间类是非常之大的。另一方面，应该指出，最典型的不具有 RNP 的空间是$L^1(0, 1)$，$BV[0, 1]$，$L^\infty(0, 1)$，$C[0,1]$，l^∞等等。

定义 4.3 设X为一个 Banach 空间，D为X的一个子集。称D是不可削弱的(not dentable)，若存在$\varepsilon>0$，使得对任何$x\in D$，均有

$$x\in \overline{\text{co}}\,(D\backslash \mathcal{N}_\varepsilon(x)). \tag{4.4}$$

其中$\mathcal{N}_\varepsilon(x)=\{x'\in X \mid \|x-x'\|<\varepsilon\}$。当$D$不具有上述性质时，即对任何$\varepsilon>0$，存在$x\in D$，使得

$$x\notin \overline{\text{co}}\,(D\backslash \mathcal{N}_\varepsilon(x)), \tag{4.5}$$

则称 D 是可削弱的(dentable)。

定理 4.4 设 X 具有 RNP，则 X 的任何有界子集均是可削弱的。

证 反证法，假如不然，则存在不可削弱的有界子集 $D\subset X$。故由定义，存在 $\varepsilon>0$，使得对任何 $x\in D$，(4.4) 式成立。从而，对任何 $\delta>0$，$x\in D$，存在有限个 $\alpha_n(x,\delta)\geqslant 0$，满足 $\sum\limits_n \alpha_n(x,\delta)=1$，以及 $x_n(x,\delta)\in D\setminus\mathcal{N}_\varepsilon(x)$，使得

$$\left\|x-\sum_n \alpha_n(x,\delta)x_n(x,\delta)\right\|<\delta. \tag{4.6}$$

不妨假设 $\alpha_n(x,\delta)<\delta$（否则可以重复一些 $x_n(x,\delta)$）。取 $\bar{x}\in D$，令

$$f_1=\bar{x}\chi_{[0,1)},\ \pi_1=\{[0,1)\}. \tag{4.7}$$

设

$$f_n=\sum_{E\in\pi_n} x_E\chi_E,\ x_E\in D,\ E\in\pi_n \tag{4.8}$$

已定义好（E 为左闭右开区间）。我们来构造 f_{n+1} 和 π_{n+1}。对任何 $E=[a,b)\in\pi_n$，存在

$$\alpha_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)\geqslant 0,\ \sum_m \alpha_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)=1$$

以及

$$x_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)\in D\setminus\mathcal{N}_\varepsilon(x_E),$$

使得

$$\left\|x_E-\sum_m \alpha_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)x_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right\|<\frac{1}{2^{n+1}}. \tag{4.9}$$

令

$$\beta_0=0,\ \beta_m=(b-a)\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right),\ m\geqslant 1, \tag{4.10}$$

$$I_m=[a+\beta_{m-1},\ a+\beta_m),\ m\geqslant 1. \tag{4.11}$$

然后定义

$$f_{n+1}=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)\chi_{I_m},\ 在 E 上, E\in\pi_n. \tag{4.12}$$

由(4.8)式知，在E上，$f_n=x_E$。因此，由$x_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)$的定义可见

$$\|f_n(t)-f_{n+1}(t)\|\geqslant\varepsilon,\ t\in[0,\ 1). \tag{4.13}$$

令π_{n+1}为所有I_m构成的$[0,\ 1)$的划分。则可见，π_{n+1}是π_n的一个加细，即π_n的分割点全是π_{n+1}的分割点。记μ为$\boldsymbol{R}$上的 Lebesgue 测度。则上述由归纳法构造的序列$\{f_n,\ \pi_n\}$满足下述条件：

$$\begin{cases} f_n=\sum\limits_{E\in\pi_n}x_E\chi_E,\ x_E\in D,\ \forall E\in\pi_n, \\ \pi_{n+1} 为 \pi_n 的加细, \\ \|f_n(t)-f_{n+1}(t)\|\geqslant\varepsilon,\ t\in[0,\ 1), \\ \left\|\int_E(f_n-f_{n+1})\mathrm{d}\mu\right\|=\left\|x_E-\sum\limits_m x_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right. \\ \left.\cdot\alpha_m\left(x_E,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right\|\mu(E)\leqslant\frac{\mu(E)}{2^{n+1}},\ \forall E\in\pi_n. \end{cases} \tag{4.14}$$

因此，下述极限存在：

$$F(E)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu,\ \forall E\in\bigcup_{m\geqslant1}\pi_m. \tag{4.15}$$

由于D是有界的，故f_n是一致有界的。从而，$F(\cdot)$是$\bigcup\limits_{m\geqslant1}\pi_m$上的一个有界变差的向量值测度。易知，它可以扩张成为$\mathscr{B}[0,1)\equiv\{[0,1)$上的 Borel 集全体$\}$上的有界变差向量值测度。由于$X$是具有 RNP 的，故存在$f\in L^1(0,1;X)$，使得

$$F(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu,\ \forall E\in\mathscr{B}[0,\ 1). \tag{4.16}$$

另一方面，若令

$$g_n=\sum_{E\in\pi_n}\frac{F(E)}{\mu(E)}\chi_E,\ \forall n\geqslant1,\ \left(\frac{0}{0}\triangleq0\right). \tag{4.17}$$

则有

$$\int_0^1 \|g_n - f_n\| \mathrm{d}\mu = \sum_{E\in\pi_n} \int_E \left\| \frac{F(E)}{\mu(E)} - x_E \right\| \mathrm{d}\mu$$

$$= \sum_{E\in\pi_n} \frac{1}{\mu(E)} \int_E \|F(E) - x_E \mu(E)\| \mathrm{d}\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{E\in\pi_n} \frac{1}{\mu(E)} \int_E \left\| \int_E f_m \mathrm{d}\mu - \int_E f_n \mathrm{d}\mu \right\| \mathrm{d}\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{E\in\pi_n} \left\| \int_E (f_m - f_n) \mathrm{d}\mu \right\|$$

$$\leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{E\in\pi_n} \left\| \int_E (f_{m+1} - f_m) \mathrm{d}\mu \right\|$$

$$\leqslant \sum_{E\in\pi_n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\mu(E)}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^n} \to 0, \quad (n\to\infty). \tag{4.18}$$

从而，

$$F(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \mathrm{d}\mu, \ \forall E \in \bigcup_{m\geqslant 1} \pi_m. \tag{4.19}$$

由 f 的可积性，知道 $\forall \varepsilon > 0$，存在 π_n，以及 $\hat{x}_E \in D$，使得

$$g_\varepsilon = \sum_{E\in\pi_n} \hat{x}_E \chi_E$$

满足

$$\int_0^1 \|f - g_\varepsilon\| \mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{4.20}$$

而对于 $m \geqslant n$，记 $g_\varepsilon = \sum_{E\in\pi_m} \hat{x}_E^m \chi_E$，此处许多 $\hat{x}_E^m$ 可能相同。则有

$$\int_0^1 \|g_m - g_\varepsilon\| \mathrm{d}\mu = \sum_{E\in\pi_m} \int_E \left\| \frac{F(E)}{\mu(E)} - \hat{x}_E^m \right\| \mathrm{d}\mu$$

$$= \sum_{E\in\pi_m} \left\| \int_E f \mathrm{d}\mu - \int_E g_\varepsilon \mathrm{d}\mu \right\|$$

$$\leqslant \int_0^1 \|f - g_\varepsilon\| \mathrm{d}\mu < \varepsilon, \tag{4.21}$$

因此，

$$\int_0^1 \|g_n - f\| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_0^1 \|g_n - g_*\| \mathrm{d}\mu + \int_0^1 \|g_* - f\| \mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant 2\int_0^1 \|f - g_*\| \mathrm{d}\mu < 2\varepsilon. \tag{4.22}$$

这意味着 $g_n \xrightarrow{L^1} f$。再由(4.18)式知 $f_n \xrightarrow{L^1} f$。但是，(4.13)式告诉我们，$\{f_n\}$不可能在 $L^1((0, 1); X)$ 中 Cauchy。这是个矛盾。因此，D 必定是可削弱的。

更深入的研究表明，上述定理的逆命题也成立。因此，X 是具有 RNP 的当且仅当 X 中任何有界集均是可削弱的。由于该逆命题与本节内容无直接关系，所以就不去证明它了。

定义 4.5 设 X 为一 Banach 空间，D 为 X 的一个子集，点 $x_0 \in D$ 称为是 D 的一个强暴露点。若存在 $x_0^* \in X^*$，使得

$$x_0^*(x_0) > x_0^*(x), \ \forall x \in D \backslash \{x_0\}, \tag{4.23}$$

且对任何 $\{x_n\} \subseteq D$，满足

$$\lim_{n\to\infty} x_0^*(x_n) = x_0^*(x_0) \equiv \sup x_0^*(D), \tag{4.24}$$

必成立

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0. \tag{4.25}$$

此时，也称 x_0^* 在 x_0 处强暴露集合 D。

定义 4.6 设 D 为 Banach 空间 X 的一个子集。$x^* \in X^*$，$\|x^*\| = 1$，$\alpha > 0$。称集合

$$S(x^*, \alpha, D) = \{x \in D: x^*(x) \geqslant \sup x^*(D) - \alpha\} \tag{4.26}$$

为 D 的一个切片(slice)。

下面的结果给出了具有 RNP 的 Banach 空间的一个非

常重要的几何性质。

定理 4.7 (Phelps) 若X是一个具有 RNP 的 Banach 空间，D是X的一个非空有界凸闭集，其强暴露点全体记为D_0，则有

$$D=\overline{\mathrm{co}}D_0. \tag{4.27}$$

该定理表明，在具有 RNP 的 Banach 空间里，有界非空凸闭集的暴露点非常之多，以致于可以用凸包的方式生成整个原来的凸闭集。为证明此结果，得先证明两个引理。

引理 4.8 (Bishop) 设D为 Banach 空间X的一个非空有界凸闭集。设对任何一切片$S(x^*, \alpha, D)$，$\forall \varepsilon>0$，均存在$0<\beta<\frac{\alpha}{2}$，以及切片$S(y^*, \beta, D)$，使得

(i) $S(y^*, \beta, D)\subseteq S(x^*, \alpha, D)$，

(ii) $\mathrm{diam}\, S(y^*, \beta, D)$
$$=\sup\{\|x-\hat{x}\|; x, \hat{x}\in S(y^*, \beta, D)\}<\varepsilon,$$

(iii) $\|x^*-y^*\|<\varepsilon$，

则D的任一个切片至少包含一个D的强暴露点，且D为其强暴露点全体的凸闭包。

证 不妨设D落在单位球内。设$S(x^*, \alpha, D)$为D的任一切片。置$y_0^*=x^*, \beta_0=\alpha$，则由条件，可以找到$0<\beta_1<\frac{\beta_0}{2}$，以及$y_1^*\in X^*$，使得

$$\begin{cases} S(y_1^*, \beta_1, D)\subseteq S(y_0^*, \beta_0, D), \\ \mathrm{diam}\, S(y_1^*, \beta_1, D)<\frac{\beta_0}{2}, \\ \|y_1^*-y_0^*\|<\frac{\beta_0}{2}. \end{cases} \tag{4.28}$$

由归纳法，设$\{y_n^*, \beta_n\}$满足下述条件：

$$
\begin{cases}
S(y_{n+1}^*, \beta_{n+1}, D) \subseteq S(y_n^*, \beta_n, D), \\
\operatorname{diam} S(y_{n+1}^*, \beta_{n+1}, D) < \dfrac{\beta_n}{2^n}, \\
\|y_{n+1}^* - y_n^*\| < \dfrac{\beta_n}{2^n}, \\
\beta_{n+1} < \dfrac{\beta_n}{2}, \\
\|y_n^*\| = 1.
\end{cases}
\tag{4.29}
$$

易知，$\{y_n^*\}$是Cauchy的，故可设

$$
y_n^* \xrightarrow{\ s\ } x_0^*, \ \|x_0^*\| = 1, \ x_0^* \in X^*. \tag{4.30}
$$

由于$S(y_n^*, \beta_n, D)$是闭的，故由(4.29)式的第一、二式及X的完备性知，存在

$$
\{x_0\} = \bigcap_{n \geq 1} S(y_n^*, \beta_n, D). \tag{4.31}
$$

再由(4.29)的第三、四式及(4.30)式知

$$
\begin{aligned}
\|x_0^* - y_n^*\| &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \|y_{m+1}^* - y_m^*\| \leq \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\beta_m}{2^m} \\
&\leq \frac{\beta_n}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

所以，对任何$x \in D$（注意到D在单位球内），有

$$
|x_0^*(x) - y_n^*(x)| \leq \|x_0^* - y_n^*\| < \frac{\beta_n}{4}, \ n \geq 3, \tag{4.33}
$$

且对任何$x \in S\left(x_0^*, \dfrac{\beta_n}{4}, D\right)$，有

$$
\begin{aligned}
\sup y_n^*(D) - \frac{3\beta_n}{4} &\leq \sup x_0^*(D) - \frac{\beta_n}{2} \\
&\leq x_0^*(x) - \frac{\beta_n}{4} \leq y_n^*(x).
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

从而，$x \in S(y_n^*, \beta_n, D)$。这意味着

$$
S\left(x_0^*, \frac{\beta_n}{4}, D\right) \subseteq S(y_n^*, \beta_n, D), \ \forall n \geq 1. \tag{4.35}
$$

由(4.31)及(4.29)中的第二式知,

$$\{x_0\}=\bigcap_{n\geqslant 3} S\left(x_0^*,\ \frac{\beta_n}{4},\ D\right), \tag{4.36}$$

$$\operatorname{diam} S\left(x_0^*,\ \frac{\beta_n}{4},\ D\right)\to 0,\ (n\to\infty). \tag{4.37}$$

因此可得

$$x_0^*(x_0)\geqslant \sup x_0^*(D)-\frac{\beta_n}{4},\quad n\geqslant 3. \tag{4.38}$$

令 $n\to\infty$, 得到

$$x_0^*(x_0)=\sup x_0^*(D). \tag{4.39}$$

今若 $x_k\in D$, 满足

$$\lim_{k\to\infty} x_0^*(x_k)=x_0^*(x_0). \tag{4.40}$$

则有

$$x_k\in S(x_0^*,\ x_0^*(x_0)-x_0^*(x_k),\ D),\ k\geqslant 1. \tag{4.41}$$

由(4.36)式知, $x_k\to x_0$。因此, x_0 为 D 的一个强暴露点。今设 D_0 为 D 的强暴露点全体。则 $\overline{\mathrm{co}}\,D_0\subseteq D$。假如存在 $x_0\in D\setminus\overline{\mathrm{co}}\,D_0$, 则由 Hahn-Banach 定理, 存在 $x_0^*\in X^*$, $\|x_0^*\|=1$, 使得

$$x_0^*(x_0)>\sup x_0^*(\overline{\mathrm{co}}\,D_0). \tag{4.42}$$

记 $$\beta=\frac{1}{2}[x_0^*(x_0)-\sup x_0^*(\overline{\mathrm{co}}\,D_0)]>0,$$

则

$$x\in S(x_0^*,\ \beta,\ D), \tag{4.43}$$

等价于

$$x_0^*(x)\geqslant \sup(D)-\beta\geqslant x_0^*(x_0)-\beta>\sup x_0^*(\overline{\mathrm{co}}\,D_0). \tag{4.44}$$

故知

$$S(x_0^*,\ \beta,\ D)\cap\overline{\mathrm{co}}\,D_0=\phi. \tag{4.45}$$

但由所证，切片$S(x_0^*, \beta, D)$中至少存在一个D的强暴露点。因此，(4.45)式是不成立的，故必有等式$\overline{\text{co}}\, D_5 = D$。

引理 4.9 (Phelps) 设X为具有RNP的Banach空间，K为X中非空有界凸闭集。设$x^* \in X^*$，$\|x^*\| = 1$，且x^*在K上不恒为0，而又有

$$K \subseteq \{x \in X \mid x^*(x) \geqslant 0\}. \tag{4.46}$$

则对任何$\varepsilon \in (0, 1)$，存在$\beta_0 > 0$，使得对任何$\beta \in (0, \beta_0)$，均存在切片$S(y^*, \beta, K)$，满足

$$\text{diam}\, S(y^*, \beta, K) < \varepsilon, \tag{4.47}$$

$$S(y^*, \beta, K) \subseteq \{x \in K \mid x^*(x) > 0\}, \tag{4.48}$$

$$\|x^* - y^*\| < \varepsilon. \tag{4.49}$$

证 记 $N = \{x \in X \mid x^*(x) = 0\}$.

情形1° $K \cap N = \phi$.

利用定理4.4知，K是可削弱的，故对任何$\varepsilon \in (0, 1)$，存在$x \in K$，使得

$$x \notin \overline{\text{co}}(K \backslash \mathcal{N}_\varepsilon(x)). \tag{4.50}$$

所以，由凸集分离性定理知，存在$y^* \in X^*$，$\|y^*\| = 1$，以及$\delta > 0$，使得

$$y^*(x) \geqslant y^*(\overline{\text{co}}(K \backslash \mathcal{N}_\varepsilon(x))) + \delta. \tag{4.51}$$

于是，若取$\beta_0 = \delta$，则对任何$\beta \in (0, \beta_0)$，有

$$S(y^*, \beta, K) \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(x). \tag{4.52}$$

事实上，若$z \in K \backslash \mathcal{N}_\varepsilon(x)$，则由(4.51)式知，

$$\begin{aligned} y^*(z) &\leqslant y^*(x) - \delta \\ &\leqslant \sup y^*(K) - \delta < \sup y^*(K) - \beta. \end{aligned}$$

即得$z \notin S(y^*, \beta, K)$，故(4.52)式成立。这样，(4.47)式成立。(在情形1°下，(4.48)式是自然成立的。)

情形2° $K \cap N \neq \phi$.

取 $z\in K$，使得 $x^*(z)>0$。由假设，这是可以办到的。然后，对任何 $x\in K\cap N$，定义 $T_x\in\mathscr{L}(X)$ 如下：

$$T_x(y)=y-\frac{2x^*(y)(z-x)}{x^*(z)},\ \forall y\in X. \qquad (4.53)$$

则易见，

$$T_x(z)=z-2(z-x)=-z+2x, \qquad (4.54)$$

从而，

$$x=\frac{1}{2}(z+T_xz). \qquad (4.55)$$

再注意到 $x\in N$，有

$$\begin{aligned}T_x^2(y)&=T_x\left[y-\frac{2x^*(y)(z-x)}{x^*(z)}\right]\\&=y-\frac{2x^*(y)(z-x)}{x^*(z)}\\&\quad-2x^*\left[y-\frac{2x^*(y)(z-x)}{x^*(z)}\right]\frac{z-x}{x^*(z)}\\&=y.\end{aligned}$$

因此，得到

$$T_x^2=I,\ \forall x\in K\cap N, \qquad (4.56)$$

$$T_x(y)=y,\ \forall y\in N,\ x\in K\cap N. \qquad (4.57)$$

由于 $\|x^*\|=1$，而 K 是有界的，因此，

$$\|T_x\|\leqslant 1+\frac{2\|z-x\|}{|x^*(z)|}\leqslant 1+\frac{4}{|x^*(z)|}\sup_{x\in K}\|x\|\equiv M_1. \qquad (4.58)$$

今定义

$$\begin{cases}\mathscr{K}=\{K\}\cup\{T_x(K),\ x\in K\cap N\},\\ K_1=\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{K}}A\right).\end{cases} \qquad (4.59)$$

则由 (4.58) 式及 K 的有界性知，K_1 是有界的。再由定理

4.4，可知 K_1 是可削弱的。所以，根据情形 1° 的证明，存在切片 $S(y^*, \alpha, K_1)$，使得

$$\operatorname{diam} S(y^*, \alpha, K_1) < d \equiv x^*(z) \wedge \frac{\varepsilon}{M_1}, \tag{4.60}$$

又由于

$$\sup y^*(K_1) = \sup_{K' \in \mathscr{K}} \sup y^*(K'),$$

故存在 $K_0 \in \mathscr{K}$，使得

$$\sup y^*(K_0) > \sup y^*(K_1) - \alpha. \tag{4.61}$$

令

$$\beta_0 = \sup y^*(K_0) - [\sup y^*(K_1) - \alpha] > 0, \tag{4.62}$$

则对任何 $x \in S(y^*, \beta, K_0)$，$\beta \in (0, \beta_0)$，均有

$$y^*(x) + \beta \geqslant \sup y^*(K_0).$$

从而，由 (4.62) 式知，

$$\begin{aligned} y^*(x) + \alpha &\geqslant y^*(x) + \beta - \sup y^*(K_0) + \sup y^*(K_1) \\ &\geqslant \sup y^*(K_1). \end{aligned}$$

即知，$x \in S(y^*, \alpha, K_1)$。从而得到

$$S(y^*, \beta, K_0) \subseteq S(y^*, \alpha, K_1). \tag{4.63}$$

因此，由 (4.60) 式知，

$$\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K_0) < d. \tag{4.64}$$

往证

$$S(y^*, \alpha, K_1) \cap K \cap N = \phi. \tag{4.65}$$

若不然，任取 $x \in S(y^*, \alpha, K_1) \cap K \cap N$，则由 (4.55) 式知

$$\frac{1}{2}(z + T_x z) = x \in S(y^*, \alpha, K_1). \tag{4.66}$$

因而，注意到 z, $T_x z \in K_1$，以及

$$\frac{1}{2}\{y^*(z) + y^*(T_x z)\} + \alpha = y^*(x) + \alpha \geqslant \sup y^*(K_1),$$

可知，$z\in S(y^*, \alpha, K_1)$或$T_x z\in S(y^*, \alpha, K_1)$。由于$S(y^*, \alpha, K_1)$是凸闭的，故若分别以$[z, x]$和$[x, T_x z]$表示连接$z$和$x$以及$x$和$T_x z$的线段，则有

$$[z, x]\subset S(y^*, \alpha, K_1) \text{ 或 } [x, T_x z]\subset S(y^*, \alpha, K_1). \tag{4.67}$$

因此注意到(4.55)及(4.60)，有

$$d > \operatorname{diam} S(y^*, \alpha, K_1) \geqslant \frac{1}{2}\|z-T_x z\|$$
$$= \|x-z\| \geqslant x^*(z-x) = x^*(z) \geqslant d.$$

这是一个矛盾。因此，(4.65)式成立。从而更有

$$S(y^*, \beta, K_0)\cap K\cap N=\phi. \tag{4.68}$$

若$K_0=K$，则

$$S(y^*, \beta, K_0)=S(y^*, \beta, K)$$

满足(4.47)、(4.48)式。现设$K_0\neq K$。则存在$x\in K\cap N$，使得$K_0=T_x(K)$，所以

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= T_x^{-1}(S(y^*, \beta, K_0))\\ &= T_x^{-1}(S(y^*, \beta, T_x(K)))\\ &= \{T_x^{-1}(y),\ y\in T_x(K),\\ &\quad y^*(y)\geqslant \sup y^*(T_x(K))-\beta\}\\ &= \{k\in K;\ T_x^*y^*(k)\geqslant \sup T_x^*y^*(K)-\beta\}\\ &= S(T_x^*y^*, \beta, K),\end{aligned}$$

它是K的一个切片，且

$$\begin{aligned}\operatorname{diam} S(T_x^*y^*, \beta, K) &\leqslant \|T_x^{-1}\|\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K_0)\\ &< \|T_x^{-1}\|d=\|T_x\|d\leqslant M_0 d\leqslant \varepsilon.\end{aligned} \tag{4.69}$$

同时，也必有

$$\tilde{K}\cap K\cap N=\phi. \tag{4.70}$$

事实上，若有 $y\in \widetilde{K}\cap K\cap N$，则由(4.57)式知

$$y=T_x(y)\in S(y^*, \beta, K_0).$$

从而得到 $S(y^*, \beta, K_0)\cap K\cap N\neq\phi$，这与(4.68)式矛盾。综合上述的情形1°和2°，可知，总可找到切片 $S(y^*,\beta, K)$，使得(4.47)、(4.48)式成立。

再来考虑(4.49)式。为此，记

$$M=\sup_{x\in K}\|x\|,\quad \lambda=\frac{4M}{\varepsilon}.$$

设

$$F=\overline{\mathrm{co}}(K\cup\{x\in N\mid \|x\|\leqslant\lambda\})\subset\{x\in X\mid x^*(x)\geqslant 0\}. \tag{4.71}$$

对此 F，由上面所证知，存在切片 $S(y^*, \beta, F)$，使得

$$\operatorname{diam} S(y^*, \beta, F)<\varepsilon, \tag{4.72}$$

$$S(y^*, \beta, F)\subseteq\{x\in F\mid x^*(x)>0\}. \tag{4.73}$$

此时必有

$$\sup y^*(K)=\sup y^*(F). \tag{4.74}$$

若不然，注意到 $K\subseteq F$，必有

$$\sup y^*(K)<\sup y^*(F). \tag{4.75}$$

于是，存在 $x_0\in N$，$\|x_0\|\leqslant\lambda$，使得

$$\begin{cases} y^*(x_0)>\sup y^*(K),\\ y^*(x_0)\geqslant\sup\{y^*(x);\ x\in N,\ \|x\|\leqslant\lambda\}-\beta. \end{cases} \tag{4.76}$$

从而，

$$y^*(x_0)\geqslant\sup y^*(F)-\beta.$$

故 $x_0\in N\cap S(y^*, \beta, F)$，这与(4.73)式矛盾。因此，(4.74)式成立。于是，对任何 $x\in S(y^*, \beta, K)$，有

$$y^*(x)\geqslant\sup y^*(K)-\beta=\sup y^*(F)-\beta.$$

因此，

$$S(y^*, \beta, K) \subseteq S(y^*, \beta, F). \tag{4.77}$$

这样，由(4.72)、(4.73)式知，(4.47)、(4.48)式成立。往证(4.49)式。取

$$u \in S(y^*, \beta, K) \subseteq S(y^*, \beta, F).$$

由(4.73)式知，

$$y^*(u) \geqslant \sup\{y^*(x): x \in N, \|x\| \leqslant \lambda\} = \lambda \|y^*\|_N. \tag{4.78}$$

事实上，若上式不成立，则存在 $x \in N$, $\|x\| \leqslant \lambda$, 使得

$$y^*(x) > y^*(u) \geqslant \sup y^*(F) - \beta.$$

所以可得 $x \in N \cap S(y^*, \beta, F)$ ，这又与 (4.73) 式矛盾。因此，(4.78)式成立。从而

$$\|y^*\|_N = \|y^*|_N\| \leqslant \frac{y^*(u)}{\lambda}. \tag{4.79}$$

由 Hahn-Banach 定理，可将 $y^*|_N$ 保范延拓为 $z^* \in X^*$。故有

$$\|z^*\| \leqslant \frac{y^*(u)}{\lambda}. \tag{4.80}$$

易知，

$$(y^* - z^*)|_N = 0.$$

任取 $x_0 \in X$，使得 $x^*(x_0) \neq 0$，然后定义

$$a = \frac{y^*(x_0) - z^*(x_0)}{x^*(x_0)},$$

则有

$$y^* - z^* = ax^*. \tag{4.81}$$

若 $a < 0$，则可得

$$\begin{aligned} \|x^* + y^*\| &= \|(1+a)x^* + z^*\| \leqslant |1 - |a|| + \|z^*\| \\ &\leqslant |\|y^*\| - \|y^* - z^*\|| + \|z^*\| \\ &\leqslant 2\|z^*\| \leqslant \frac{2y^*(u)}{\lambda}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

于是，注意到 $x^*(u)>0$ 以及 $\|u\|\leqslant M$，有

$$\frac{y^*(u)}{M}\leqslant\frac{y^*(u)}{\|u\|}<\frac{(x^*+y^*)(u)}{\|u\|}$$

$$\leqslant\|x^*+y^*\|\leqslant\frac{2y^*(u)}{\lambda}.$$

上式表明 $y^*(u)>0$(见(4.78)式)，故可得

$$\lambda\leqslant 2M=\frac{\varepsilon}{2}\lambda<\frac{\lambda}{2},$$

则显然矛盾．故只能 $a\geqslant 0$，从而由 $u\in K$（从而 $\|u\|\leqslant M$），知

$$\|x^*-y^*\|=\|(1-a)x^*-z^*\|\leqslant|1-a|+\|z^*\|$$

$$\leqslant\frac{2y^*(u)}{\lambda}=\frac{2M}{\lambda}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

故(4.49)式得证。

利用上述两个引理，我们来证明定理 4.7。

定理 4.7 的证明　设 $\alpha>0$，$S(x^*,\alpha,D)$ 为 D 的一个切片。经平移 D，可设

$$\sup x^*(D)=\alpha, \tag{4.83}$$

所以有

$$K=\{x\in D\,|\,x^*(x)\geqslant 0\}=S(x^*,\alpha,D). \tag{4.84}$$

由 $\alpha>0$ 知，存在 $x\in D$，使得

$$x^*(x)>\sup x^*(D)-\alpha=0, \tag{4.85}$$

即

$$K\cap\{x\in X:\ x^*(x)>0\}\neq\phi. \tag{4.86}$$

今设 $\varepsilon\in(0,1)$，则由引理 4.9 知，存在切片

$$S(y^*,\beta,K),\ 0<\beta<\frac{\alpha}{2},$$

使得

$$
\begin{cases}
\operatorname{diam} S(y^*, \beta, K) < \varepsilon, \\
S(y^*, \beta, K) \subset \{x \in X \mid x^*(x) > 0\}, \\
\|x^* - y^*\| < \varepsilon.
\end{cases}
\tag{4.87}
$$

注意到

$$
S(y^*, \beta, K) \subseteq K = S(x^*, \alpha, D). \tag{4.88}
$$

今再证

$$
S(y^*, \beta, D) \subseteq S(y^*, \beta, K). \tag{4.89}
$$

为此，任取 $x \in D \backslash S(y^*, \beta, K)$，无非有两种情形：

(i) $x \in K$。由于 $x \notin S(y^*, \beta, K)$，故只能有

$$
y^*(x) < \sup y^*(K) - \beta \leqslant \sup y^*(D) - \beta.
$$

从而得到 $x \notin S(y^*, \beta, D)$。

(ii) $x \notin K$。由 K 的定义，$x^*(x) < 0$。今任取

$$
z \in S(y^*, \beta, K) \subset \{x \in X \mid x^*(x) > 0\}.
$$

则由于 $x^*(z) > 0$, $x^*(x) < 0$，故存在 $w \in [x, z]$，使得

$$
x^*(w) = 0.
$$

从而也就必有 $w \notin S(y^*, \beta, K)$，因此，

$$
y^*(w) < \sup y^*(K) - \beta. \tag{4.90}
$$

由 $w \in [x, z]$ 知，存在 $0 < \lambda \leqslant 1$，使得 $w = \lambda x + (1-\lambda) z$，故

$$
x = \frac{w}{\lambda} - \frac{1-\lambda}{\lambda} z.
$$

从而，由 z 的取法及(4.90)式知

$$
\begin{aligned}
y^*(x) &= \frac{1}{\lambda} y^*(w) - \frac{1-\lambda}{\lambda} y^*(z) \\
&< \frac{1}{\lambda} [\sup y^*(K) - \beta] - \frac{1-\lambda}{\lambda} [\sup y^*(K) - \beta] \\
&= \sup y^*(K) - \beta.
\end{aligned}
$$

所以仍有 $x \notin S(y^*, \beta, K)$。从而，(4.89) 式成立。结合(4.88)式，得到

$$S(y^*, \beta, D) \subseteq S(x^*, \alpha, D). \tag{4.91}$$

故引理 4.8 的条件全部满足，从而定理得证。

推论 4.10 设 X 是一个具有 RNP 的 Banach 空间，D 为 X 中有界闭集，则全体 $\overline{\text{co}}\, D$ 的强暴露点均落在 D 中。

证 容易知道，对任何 $x^* \in X^*$，

$$\sup x^*(D) = \sup x^*(\overline{\text{co}}\, D), \tag{4.92}$$

因此，对任何 $\alpha > 0$，有

$$S(x^*, \alpha, D) \subseteq S(x^*, \alpha, \overline{\text{co}} D). \tag{4.93}$$

今设 x_0 为 $\overline{\text{co}}\, D$ 的任一强暴露点，即存在 $x_0^* \in X^*$，$\|x_0^*\| = 1$，使得 x_0^* 在 $x_0 \in \overline{\text{co}}\, D$ 处强暴露 $\overline{\text{co}}\, D$。由(4.93)式知，对任何 $\alpha > 0$，存在 $x_\alpha \in D$，使得

$$x_0^*(x_\alpha) \geq \sup x_0^*(\overline{\text{co}}\, D) - \alpha.$$

从而，由强暴露性知，$x_\alpha \to x_0$。故由 D 的闭性，得知 $x_0 \in D$。

推论 4.11 设 X 是具有 RNP 的 Banach 空间，D 为 X 的一个有界闭集，则所有强暴露 D 的线性泛函在 X^* 中稠密。

证 对任何 $x^* \in X^*$，$\|x^*\| = 1$，考虑切片 $S(x^*, \alpha, D)$，$\alpha > 0$，由定理 4.7 及引理 4.8 可知，该切片中总有 D 的一个强暴露点 x_0，且对适当选取的 α，可使相应的强暴露泛函 x_0^* 任意接近 x^*，这就证得了推论。

下面，我们来叙述并证明本节的主要结果。

定理 5.12 (Stegall 引理) 设 X 是一个具有 RNP 的 Banach 空间，D 为 X 中有界闭集，$f: D \to R$ 是上半连续、上有界的函数。则对任何 $\delta > 0$，存在 $x^* \in X^*$，$\|x^*\| < \delta$，使得 $f + x^*$ 强暴露 D，即存在 $x_0 \in D$，使得

$$f(x_0) + x^*(x_0) > f(x) + x^*(x), \ \forall x \in D \setminus \{x_0\}, \tag{4.94}$$

且对任何 $x_n \in D$，只要

$$\lim_{k\to\infty}[f(x_k)+x^*(x_k)]=f(x_0)+x^*(x_0), \tag{4.95}$$

使有

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x_0\|=0. \tag{4.96}$$

证　不妨设

$$\sup f(D)=1. \tag{4.97}$$

定义 $g: D\cup(-D)\to\boldsymbol{R}$ 如下(此处, $-D=\{-x \mid x\in D\}$):

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\vee f(-x), & x\in D\cap(-D), \\ f(x), & x\in D\setminus(-D), \\ f(-x), & x\in(-D)\setminus D. \end{cases} \tag{4.98}$$

即, g 是 f 的一个"偶延拓"。易见

$$g(-x)=g(x),\ \forall x\in D\cup(-D), \tag{4.99}$$

$$\sup g(D\cup(-D))=\sup f(D)=1. \tag{4.100}$$

同时,对任何 $\alpha\in\boldsymbol{R}$, 集合

$$\begin{aligned} &\{x\in D\cup(-D) \mid g(x)\geqslant\alpha\} \\ =&\{x\in D\setminus(-D) \mid f(x)\geqslant\alpha\} \\ &\cup\{x\in(-D)\setminus D \mid f(-x)\geqslant\alpha\} \\ =&\{x\in D\setminus(-D) \mid f(x)\geqslant\alpha\} \\ &\cup(-\{x\in D\setminus(-D) \mid f(x)\geqslant\alpha\}) \end{aligned}$$

是闭的。因此, g 仍然是上半连续的。令

$$E=\left\{\frac{(tx,\ t)}{g(x)-2},\ x\in D\cup(-D),\ 0\leqslant t\leqslant 1\right\}, \tag{4.101}$$

则 E 是 $X\times\boldsymbol{R}$ 中的一个闭集。事实上,若有

$$\begin{aligned} E\ni(y_k,\ s_k)&\equiv\frac{(t_k x_k,\ t_k)}{g(x_k)-2} \\ &=\frac{t_k}{g(x_k)-2}(x_k,\ 1)\to(y,\ s), \end{aligned} \tag{4.102}$$

则由于 $t_k\in[0,1]$, $g(x_k)\in(-\infty,1]$, 故知

$$-1\leqslant\frac{t_k}{g(x_k)-2}\leqslant 0,\ \forall k\geqslant 1. \tag{4.103}$$

所以,不妨设

$$\frac{t_k}{g(x_k)-2}\to\tau\in[-1,0],\ (k\to\infty). \tag{4.104}$$

若 $\tau=0$, 则由D的有界性可知 $(y,s)=(0,0)\in E$。今设 $\tau<0$, 则有

$$x_k\to x\in D,\ (k\to\infty). \tag{4.105}$$

另外,可设

$$t_k\to t\in[0,1], \tag{4.106}$$

$$g(x_k)\to g_0\in(-\infty,1]. \tag{4.107}$$

此处,由于 $\tau\neq 0$, $g(x_k)$下方一致有界. 现在, 由 g 的上半连续性可知

$$g_0\leqslant g(x). \tag{4.108}$$

今取

$$\hat{t}=t\,\frac{2-g(x)}{2-g_0}\in[0,1],$$

则有

$$(y,s)=\tau(x,1)=\frac{(tx,t)}{g_0-2}=\frac{(\hat{t}x,\hat{t})}{g(x)-2}\in E. \tag{4.109}$$

这说明,E是 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{R}$ 中的一个闭集. 另外, 由D的有界性及(4.100) 式可知, E 也是有界的. 容易知道 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{R}$ 仍具有RNP. 因此,由推论 4.11 知, 对任给的 $\delta\in(0,1)$ 以及 $(0,-1)\in(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{R})^*=\boldsymbol{X}^*\times\boldsymbol{R}$, 存在$(x_\delta^*,\alpha_\delta^*)\in\boldsymbol{X}^*\times\boldsymbol{R}$, 使得

$$\|x_\delta^*\|<\delta,\ |1+\alpha_\delta^*|<\delta. \tag{4.110}$$

且$(x_\delta^*,\alpha_\delta^*)$强暴露$E$于某一点 $\dfrac{(t_0x_0,t_0)}{g(x_0)-2}$. 因此,成立着

$$\frac{t}{g(x)-2}(x_\delta^*(x)+\alpha_\delta^*)\leqslant\frac{t_0}{g(x_0)-2}(x_\delta^*(x_0)+\alpha_\delta^*),$$

$$\forall 0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in D\cup(-D). \tag{4.111}$$

在上式中，取 $t=0$，得知右端是非负的。存在常数 $\sigma_0>0$，使得当 δ 充分小时，有

$$\frac{t_0}{g(x_0)-2}(x_\delta^*(x_0)+\alpha_\delta^*)=\sigma_\delta\geqslant\sigma_0>0. \tag{4.112}$$

这里应注意 $(t_0,\ x_0)$ 也是依赖于 δ 的。今假如(4.112)式不成立，则可设 $\sigma_\delta\to 0(\delta\to 0)$。由(4.111)式知

$$\pm x_\delta^*(x)+\alpha_\delta^*\geqslant\sigma_\delta(g(x)-2),$$

从而得到

$$-1+\delta>\alpha_\delta^*\geqslant\frac{\sigma_\delta(g(x)-2)}{2},\quad\forall x\in D. \tag{4.113}$$

因此，令 $\delta\to 0$，得到一个矛盾。故(4.112)式成立。这样，进一步可得

$$\frac{t_0}{g(x_0)-2}(x_\delta^*(x_0)+\alpha_\delta^*)\leqslant\frac{1}{g(x_0)-2}(x_\delta^*(x_0)+\alpha_\delta^*).$$

再由强暴露性，得到 $t_0=1$。记

$$\hat{x}_\delta^*=\frac{1}{\sigma_\delta}x_\delta^*,\quad\hat{\alpha}_\delta^*=\frac{1}{\sigma_\delta}\alpha_\delta^*, \tag{4.114}$$

则有

$$\|\hat{x}_\delta^*\|\leqslant\frac{1}{\sigma_0}\delta,\quad\forall\delta\text{ 充分小}, \tag{4.115}$$

$$\frac{1}{g(x_0)-2}(\hat{x}_\delta^*(x_0)+\hat{\alpha}_\delta^*)=1. \tag{4.116}$$

令 $\varepsilon=\pm 1$，使得

$$x_1=\varepsilon x_0\in D,$$

而且(注意 $g(x_0)=f(x_0)\vee f(-x_0)$，$\forall x_0\in D\cap(-D)$)。

$$g(x_1)=g(x_0)=f(\varepsilon x_0)=f(x_1). \tag{4.117}$$

再置 $x_1^* = -\varepsilon\hat{x}_\delta^*$，则由 (4.116) 式知

$$g(x_1)+x_1^*(x_1)=2+\hat{\alpha}_\delta^*. \tag{4.118}$$

由 (4.111) 和 (4.116) 式知

$$g(x)+x_1^*(x)\leqslant 2+\hat{\alpha}_\delta^*,\ \forall x\in D\cup(-D). \tag{4.119}$$

故可得

$$f(x_1)+x_1^*(x_1)=2+\hat{\alpha}_\delta^*\geqslant f(x)+x_1^*(x),\ \forall x\in D. \tag{4.120}$$

今若有 $x_k\in D$，使得

$$f(x_k)+x_1^*(x_k)\to f(x_1)+x_1^*(x_1),\ (k\to\infty), \tag{4.121}$$

则由

$$f(x_k)+x_1^*(x_k)\leqslant g(x_k)+x_1^*(x_k),$$

知

$$g(x_k)+x_1^*(x_k)\to f(x_1)+x_1^*(x_1)=g(x_1)+x_1^*(x_1),\ (k\to\infty). \tag{4.122}$$

故不妨设

$$g(x_k)\to g_0,\ x_1^*(x_k)\to\lambda.$$

于是有

$$g_0+\lambda=g(x_1)+x_1^*(x_1),$$

从而，

$$\frac{g(x_1)+x_1^*(x_1)-x_1^*(x_k)-2}{g(x_k)-2}\to\frac{g(x_1)+x_1^*(x_1)-\lambda-2}{g_0-2}=1. \tag{4.123}$$

而由 (4.118) 式知

$$\frac{g(x_1)+x_1^*(x_1)-x_1^*(x_k)-2}{g(x_k)-2}=(\hat{x}_\delta^*,\hat{\alpha}_\delta^*)\left(\frac{(\varepsilon x_k,1)}{g(\varepsilon x_k)-2}\right).$$

因此，由强暴露性知

$$\frac{(\varepsilon x_k, 1)}{g(\varepsilon x_k)-2} \to \frac{(x_0, 1)}{g(x_0)-2}, \quad (k \to \infty),$$

从而必有

$$\|x_k - x_1\| = \|\varepsilon x_k - x_0\| \to 0. \tag{4.124}$$

即 $f + x_1^*$ 在点 x_1 强暴露 D。

第五章 粘性解理论的应用

本章将给出粘性解理论的一些应用。

§1 能控区域的确定

考虑下述非线性定常控制系统

$$\begin{cases} \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u(t)), \ t \geqslant 0, \\ y_x(0) = x. \end{cases} \tag{1.1}$$

此处，系统的状态 $y(\cdot)$ 取值于 $\mathbf{R}^n$，而控制作用 $u(\cdot)$ 取值于某个度量空间U。我们所关心的是下述问题：对给定的集合 $M \subset \mathbf{R}^n$，寻找所有的初值 $x \in \mathbf{R}^n$，使得存在某个控制作用 $u(\cdot)$，将该初值 x 转移到M里。下面，给出严格的叙述。记

$$\mathscr{U}[0, \infty) = \{u: [0, \infty) \to U \mid u(\cdot)\text{是可测的}\}.$$

设 $f: \mathbf{R}^n \times U \to \mathbf{R}^n$ 满足下述条件：存在常数 $L > 0$，使得

$$\|f(x, u) - f(\hat{x}, u)\| \leqslant L\|x - \hat{x}\|, \ \forall x, \hat{x} \in \mathbf{R}^n, u \in U, \tag{1.2}$$

$$\|f(x, u)\| \leqslant L(1 + \|x\|), \ \forall (x, u) \in \mathbf{R}^n \times U. \tag{1.3}$$

这样，对任何 $x \subset \mathbf{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty)$，(1.1) 存在唯一的解，记作 $y_x(\cdot; u(\cdot)) \equiv y_x(\cdot)$。定义

$$C(M) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \text{存在 } u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty), \text{ 使得对某个 } t \geqslant 0, \ y_x(t; u(\cdot)) \in M\}. \tag{1.4}$$

称 $C(M)$为(1.1) 式关于集合M的能控区域。我们的目的是利用粘性解的理论来确定 $C(M)$。下面，总假设M是 $\mathbf{R}^n$ 中的

一个非空闭子集。易见，总有

$$M \subseteq C(M). \tag{1.5}$$

现在，对任何$x\in \mathbf{R}^n$，定义

$$\mathscr{A}_x=\{(r, u(\cdot))\in[0, \infty)\times\mathscr{U}[0, \infty)\mid y_x(r;u(\cdot))\in M\}, \tag{1.6}$$

$$\mathscr{U}_x=\{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, \infty)\mid \exists r\in[0, \infty),\text{使得}(r, u(\cdot))\in\mathscr{A}_x\}. \tag{1.7}$$

于是，有

$$C(M)=\{x\in \mathbf{R}^n\mid \mathscr{A}_x\neq\phi\}. \tag{1.8}$$

再令

$$T(x, u(\cdot))=\inf\{r\in[0, \infty)\mid(r, u(\cdot))\in\mathscr{A}_x\}, (\inf\phi\triangleq\infty), \tag{1.9}$$

$$\forall(x, u(\cdot))\in \mathbf{R}^n\times\mathscr{U}[0, \infty).$$

当$x\in C(M)$，$u(\cdot)\in\mathscr{U}_x$时，$T(x, u(\cdot))$ 表示轨线$y_x(\cdot; u(\cdot))$ 第一次到达M的时刻。因此，下面的命题是显而易见的。

命题 1.1 设 (1.2)、(1.3)式成立。则下述命题等价：

(i) $x\in M$;

(ii) $T(x, u(\cdot))=0, \forall u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, \infty)$;

(iii) 存在 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, \infty)$，使得 $T(x, u(\cdot))=0$。

上面的命题可知，若$x\notin M$，则对任何给定的$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, \infty)$，

$$T(x, u(\cdot))>0. \tag{1.10}$$

进一步地，由$T(x, u(\cdot))$的定义知，有下述结果。

命题 1.2 系统 (1.1) 关于M的能控区域$C(M)$可表示为

$$C(M)=\{x\in \mathbf{R}^n\mid \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)} T(x, u(\cdot))<\infty\}. \tag{1.11}$$

因此，需要研究 $T(x, u(\cdot))$ 关于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, \infty)$ 的下确界。这实际上是一个时间最优控制问题。由于

$$\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)} T(x, u(\cdot)) = +\infty, \ \forall x\notin C(M), \quad (1.12)$$

故直接研究 $T(x, u(\cdot))$不太方便，于是，引入下述泛函

$$J_x(r, u(\cdot)) = \begin{cases} 1-e^{-r}, & (r, u(\cdot))\in\mathscr{A}_x, \\ 1, & (r, u(\cdot))\notin\mathscr{A}_x. \end{cases} \quad (1.13)$$

考虑下述问题：

问题 T　对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$，寻找 $(\bar{r}, \bar{u}(\cdot))\in[0, \infty)\times\mathscr{U}[0, \infty)$，使得

$$J_x(\bar{r}, \bar{u}(\cdot)) = \inf\{J_x(r, u(\cdot)) \mid (r, u(\cdot))\in[0, \infty)\times\mathscr{U}[0, \infty)\}\equiv v(x). \quad (1.14)$$

由(1.14)式定义的函数 $v(\cdot)$称为是问题 T 的值函数。

定理 1.3　系统(1.1)关于M的能控区域$C(M)$可表示为

$$C(M) = \{x\in\mathbf{R}^n \mid v(x)<1\}. \quad (1.15)$$

证　设 $x\in C(M)$，则存在 $r\in[0, \infty)$以及 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0, \infty)$，使得 $(r, u(\cdot))\in\mathscr{A}_x$。于是，

$$v(x)\leqslant 1-e^{-r}<1.$$

反之，若 $v(x)<1$，则由定义，必存在 $(r, u(\cdot))\in\mathscr{A}_x$。从而，由(1.8)式知 $x\in C(M)$。

假如能证明值函数 $v(\cdot)$ 是某一个 HJB 方程唯一的粘性解，并且找出相应的 HJB 方程，那么对 $C(M)$的刻画，(1.15)式便是完整的了。由(1.13)式定义的目标泛函并不是以前章节中碰到过的种类。因此，对于此值函数 $v(\cdot)$，必须重新讨论。先引进一些概念。

定义 1.4　系统(1.1)称为是关于M局部能控的，如果对任何 $x\in M$，存在 $\delta=\delta(x)>0$，使得

$$\mathcal{N}_\delta(x) = \{\hat{x} \in R^n \mid \|x - \hat{x}\| < \delta\} \subset C(M). \quad (1.16)$$

若 $\delta > 0$ 可取得不依赖于 $x \in M$，则称系统 (1.1) 关于 M 是一致局部能控的。

容易知道下述命题是成立的。

命题 1.5 系统(1.1)关于 M 局部能控当且仅当

$$M \subset \mathrm{Int}C(M). \quad (1.17)$$

而系统(1.1)关于 M 一致局部能控当且仅当存在 $\delta > 0$，使得

$$\mathcal{N}_\delta(M) = \{x \in R^n \mid d(x, M) < \delta\} \subset C(M). \quad (1.18)$$

且当 M 是紧集时，两种局部能控性等价。

若系统 (1.1) 关于 M 是局部能控的，则对 $x \in M$，存在 $\delta > 0$，对于 $\hat{x} \in \mathcal{N}_\delta(x)$，总可找到 $(\hat{r}, \hat{u}(\cdot)) \in \mathscr{A}_{\hat{x}}$。但是，一般而言，并不知道 r 是否较小。直观上讲，我们期望 $\hat{x}$ 越靠近 M，相应的 $\hat{r}$ 就应该越小。而定义 1.4 给出的局部能控性并不能保证上面所说的。于是，再引进下面的概念。

定义 1.6 系统(1.1) 称为是关于 M 短时间局部能控的，如果对任何 $x \in M$，任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$，使得对任何 $\hat{x} \in \mathcal{N}_\delta(x)$，存在 $(\hat{r}, \hat{u}(\cdot)) \in \mathscr{A}_{\hat{x}}$，满足

$$\hat{r} \in [0, \varepsilon]. \quad (1.19)$$

若上述的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 不依赖于 $x \in M$，则称系统 (1.1) 是短时间一致局部能控的。

上面的定义讲，当系统 (1.1) 关于 M 是短时间局部能控时，对任何 $x \in M$，$\varepsilon > 0$，总可找到 $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$，使得当 $\hat{x} \in \mathcal{N}_\delta(x)$ 时，可以找到 $\hat{r} \in [0, \varepsilon]$，$\hat{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty)$，满足

$$y_{\hat{x}}(\hat{r}; \hat{u}(\cdot)) \in M. \quad (1.20)$$

由条件 (1.2)、(1.3) 式可知，还有如下结论：即所有的点 $\{y_{\hat{x}}(t; \hat{u}(\cdot)) \mid t \in [0, \varepsilon]\}$ 不会远离 M。换言之，若 (1.2)、(1.3)式成立，且系统(1.1)关于集合 M 是短时间局部能控的，

则 $\forall x\in M$, ε, $\sigma>0$, $\exists\delta=\delta(x,\varepsilon,\sigma)>0$, 使得当 $\hat{x}\in\mathcal{N}_\delta(x)$ 时，可找到 $\hat{r}\in[0,\varepsilon]$, $\hat{u}(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)$，满足(1.20) 式以及

$$d(y_{\hat{x}}(t;\hat{u}(\cdot)),M)\leqslant\sigma,\ \forall t\in[0,\varepsilon]. \tag{1.21}$$

命题 1.7 设(1.2)、(1.3)式成立，系统 (1.1) 关于 M 是局部能控的。则 $C(M)$ 是一个开集。

证 设 $x\in C(M)$, 则存在 $(r,u(\cdot))\in\mathscr{A}_x$。也即(注意(1.17)式)

$$y_x(r;u(\cdot))\in M\subset\operatorname{Int}C(M). \tag{1.22}$$

由第一章命题 2.6 知，对任何 $\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$,

$$\|y_x(r;u(\cdot))-y_{\hat{x}}(r;u(\cdot))\|\leqslant e^{Lr}\|x-\hat{x}\|, \tag{1.23}$$

因此，可找到 $\delta>0$, 使得当 $\hat{x}\in\mathcal{N}_\delta(x)$ 时，

$$y_{\hat{x}}(r;u(\cdot))\in\operatorname{Int}C(M)\subset C(M), \tag{1.24}$$

从而，存在 $(\hat{r},\hat{u}(\cdot))\in\mathscr{A}_{y_{\hat{x}}(r;u(\cdot))}$，因此，若记

$$\bar{u}(t)=\begin{cases}u(t), & t\in[0,r],\\ \hat{u}(t-r), & t\in(r,\infty).\end{cases}$$

则 $\bar{u}(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)$, 且 $(r+\hat{r},\bar{u}(\cdot))\in\mathscr{A}_{\hat{x}}$，故知 $\hat{x}\in C(M)$，也即

$$\mathcal{N}_\delta(x)\subset C(M).$$

对于值函数 $v(\cdot)$，有下面重要的结果。

定理 1.8 设(1.2)、(1.3)式成立，$M\subseteq\boldsymbol{R}^n$ 是非空闭集。设系统 (1.1) 关于 M 是短时间一致局部能控的。则值函数 $v(\cdot)$ 是连续的且

$$v(x)=0,\ \forall x\in M, \tag{1.25}$$

$$0<v(x)<1,\ \forall x\in C(M)\setminus M, \tag{1.26}$$

$$\lim_{x\to x',x\in C(M)}v(x)=1,\ 关于\ x'\in\partial C(M)一致。 \tag{1.27}$$

证 首先，由 $v(\cdot)$ 的定义，易证(1.25)和(1.26)式。现

在，证明 $v(\cdot)$ 在 $C(M)$ 上是连续的。为此，任取 $x\in C(M)$。则由命题1.7知，存在 $\sigma_0>0$，使得 $\mathcal{N}_{\sigma_0}(x)\subset C(M)$。从而，由(1.26)式知，存在 $\varepsilon_0>0$，使得

$$v(\hat{x})\leqslant 1-\varepsilon_0,\ \forall\hat{x}\in\mathcal{N}_{\sigma_0}(x). \tag{1.28}$$

对于任何 $\hat{x}\in\mathcal{N}_{\sigma_0}(x)$ 以及 $\varepsilon\in\left(0,\ \frac{\varepsilon_0}{2}\right]$，存在

$(\hat{r}_\varepsilon,\ \hat{u}_\varepsilon(\cdot))\in\mathscr{A}_{\hat{x}}$，使得

$$v(\hat{x})\leqslant J_{\hat{x}}(\hat{r}_\varepsilon,\ \hat{u}_\varepsilon(\cdot))\equiv 1-e^{-\hat{r}_\varepsilon}\leqslant v(\hat{x})+\varepsilon\leqslant 1-\frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{1.29}$$

因此，

$$0\leqslant\hat{r}_\varepsilon\leqslant\log\frac{2}{\varepsilon_0},\ \forall\varepsilon\in\left(0,\ \frac{\varepsilon_0}{2}\right],\ \hat{x}\in\mathcal{N}_{\sigma_0}(x). \tag{1.30}$$

因为(1.1)式关于M是短时间一致局部能控的，故由定义1.6知，对 $\varepsilon\in\left(0,\ \frac{\varepsilon_0}{2}\right]$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何 $\hat{x}\in\mathcal{N}_\delta(M)$，存在 $(\tilde{r},\ \tilde{u}(\cdot))\in\mathscr{A}_{\hat{x}}$，$0\leqslant\tilde{r}\leqslant\varepsilon$。现在，对

$$\varepsilon\in\left(0,\ \frac{\varepsilon_0}{2}\right],$$

取 $\sigma_0>0$ 足够小，使得

$$2\sigma_0\left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)^L<\delta(\varepsilon), \tag{1.31}$$

则对任何 $\hat{x},\bar{x}\in\mathcal{N}_{\sigma_0}(x)$，由第一章命题2.6，

$$\begin{aligned}\|y_{\hat{x}}(\hat{r}_\varepsilon,\ \hat{u}_\varepsilon(\cdot))-y_{\bar{x}}(\hat{r}_\varepsilon,\ \hat{u}_\varepsilon(\cdot))\|&\leqslant e^{L\hat{r}_\varepsilon}\|\hat{x}-\bar{x}\| \\ &\leqslant e^{L\log\left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)}\cdot 2\sigma_0=2\sigma_0\left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)^L<\delta(\varepsilon).\end{aligned} \tag{1.32}$$

从而，$y_{\bar{x}}(\hat{r}_\varepsilon;\hat{u}_\varepsilon(\cdot))\in\mathcal{N}_\delta(M)$，故存在

$(\tilde{r},\ \tilde{u}(\cdot))\in\mathscr{A}_{y_{\bar{x}}(\hat{r}_\varepsilon;\hat{u}_\varepsilon(\cdot))}$，$0\leqslant\tilde{r}\leqslant\varepsilon$。定义

$$\widetilde{w}_\varepsilon(t)=\begin{cases}\hat{u}_\varepsilon(t),\ t\in[0,\hat{\tau}_\varepsilon],\\ \widetilde{u}(t),\ t\in(\hat{\tau}_\varepsilon,\ \infty).\end{cases} \tag{1.33}$$

则有 $(\hat{\tau}_\varepsilon+\widetilde{\tau},\ \widetilde{w}_\varepsilon(\cdot))\in\mathscr{A}_{\bar{x}}$. 因此,

$$\begin{aligned}v(\bar{x})&\leqslant J_{\bar{x}}(\hat{\tau}_\varepsilon+\widetilde{\tau},\ \widetilde{w}_\varepsilon(\cdot))=1-e^{-\hat{\tau}_\varepsilon-\widetilde{\tau}}\\&=J_{\hat{x}}(\hat{\tau}_\varepsilon,\ \hat{u}_\varepsilon(\cdot))+e^{-\hat{\tau}_\varepsilon}(1-e^{-\widetilde{\tau}})\\&\leqslant v(\hat{x})+\varepsilon+(1-e^{-\widetilde{\tau}})\leqslant v(\hat{x})+2\varepsilon.\end{aligned} \tag{1.34}$$

由于 $\bar{x}$ 和 $\hat{x}$ 的地位是一样的，故证得 $v(\cdot)$ 在 $C(M)$ 上的连续性。现在，证明(1.27)式。用反证法，设存在 $\varepsilon_0>0$，以及 $\{x_k\}\subset C(M)$，使得

$$d(x_k,\ \partial C(M))\leqslant\frac{1}{k},\ \forall k\geqslant1, \tag{1.35}$$

$$v(x_k)\leqslant1-\varepsilon_0,\ \forall k\geqslant1. \tag{1.36}$$

则由(1.36)式知，存在 $(t_k,\ u_k(\cdot))\in\mathscr{A}_{x_k}$，以及常数 $C_0>0$，使得

$$0\leqslant t_k\leqslant C_0,\ \forall k\geqslant1. \tag{1.37}$$

于是，由第一章命题 2.6 知，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $\hat{x}\in\mathscr{N}_\delta(x_k)$时,

$$y_{\hat{x}}(t_k;u_k(\cdot))\in\mathscr{N}_\varepsilon(M). \tag{1.38}$$

而由一致局部能控性，对某个 $\varepsilon>0$，$\mathscr{N}_\varepsilon(M)\subset C(M)$。于是，结合(1.38)式知存在 $\delta>0$，不依赖于 $k\geqslant1$，使得

$$\hat{x}\in C(M),\ \forall\hat{x}\in\mathscr{N}_\delta(x_k),\ k\geqslant1. \tag{1.39}$$

这意味着

$$d(x_k,\ \partial C(M))\geqslant\delta,\ \forall k\geqslant1, \tag{1.40}$$

这与(1.35)式矛盾。因此(1.27) 式成立。于是可见 $v(\cdot)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上连续，因为在 $\boldsymbol{R}^n\backslash C(M)$上，$v(x)=1$。

有了值函数的连续性以后，可试图导出相应的最优性原理和 HJB 方程。值得注意的是，这是一个具有终端约束的问

题，而在第二章引出动态规划方法时，曾经讲过，动态规划方法目前还不能用来处理一般具有终端约束的问题。所幸的是，现在的问题比较特殊，我们还能用动态规划方法来处理。但是，在处理过程中，将看出一些不同的地方。

定理 1.9 设(1.2)、(1.3) 式成立而M为非空闭集。设系统(1.1)关于M是局部能控的，则对任何 $x\in C(M)\backslash M$，存在 $s>0$，使得

$$v(x)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)}\{1-e^{-t}+e^{-t}v(y_x(t;u(\cdot)))\},\ \forall t\in[0,s]. \tag{1.41}$$

证 对 $x\in C(M)\backslash M$，由定义知，存在 $s_1>0$，使得

$$y_x(t;u(\cdot))\in C(M)\backslash M,\ \forall u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty),\ t\in[0,s_1]. \tag{1.42}$$

今对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)$，$t\in[0,s_1]$，设

$$(r,w(\cdot))\in\mathscr{A}_{y_x(t;u(\cdot))},$$

然后定义

$$\hat{u}(\tau)=\begin{cases}u(\tau), & \tau\in[0,t],\\ w(\tau-t), & \tau\in(t,\infty).\end{cases} \tag{1.43}$$

则易见 $(t+r,\hat{u}(\cdot))\in\mathscr{A}_x$，因此，

$$\begin{aligned}v(x)&\leqslant J_x(t+r,\hat{u}(\cdot))=1-e^{-t-r}\\&=1-e^{-t}+e^{-t}[1-e^{-r}]\\&=1-e^{-t}+e^{-t}J_{y_x(t;u(\cdot))}(r,w(\cdot)).\end{aligned} \tag{1.44}$$

由于 $(r,w(\cdot))\in\mathscr{A}_{y_x(t;u(\cdot))}$ 是任意的，得到

$$v(x)\leqslant 1-e^{-t}+e^{-t}v(y_x(t;u(\cdot))),\ \forall u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty). \tag{1.45}$$

故得

$$v(x)\leqslant\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,\infty)}\{1-e^{-t}+e^{-t}v(y_x(t;u(\cdot)))\}$$

$$\geqslant W(x, t), \ t \in [0, s_1]. \tag{1.46}$$

反之，对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $(\tau_\varepsilon, u_\varepsilon(\cdot)) \in \mathscr{A}_x$，使得

$$v(x) \geqslant J_x(\tau_\varepsilon, u_\varepsilon(\cdot)) - \varepsilon. \tag{1.47}$$

由于 $x \in C(M) \backslash M$，故有 $s_0 > 0$，使得

$$\tau_\varepsilon \geqslant s_0, \ \forall \varepsilon > 0. \tag{1.48}$$

今对任何 $t \in [0, s_0]$，置

$$\hat{u}_\varepsilon(\tau) = u_\varepsilon(t + \tau), \ \tau \in [0, \infty),$$

则有 $(\tau_\varepsilon - t, \hat{u}_\varepsilon(\cdot)) \in \mathscr{A}_{y_x(t; u_\varepsilon(\cdot))}$。因此，由(1.47)式可得

$$\begin{aligned} v(x) + \varepsilon &\geqslant 1 - e^{-\tau_\varepsilon} \\ &= 1 - e^{-t} + e^{-t} J_{y_x(t; u_\varepsilon(\cdot))}(\tau_\varepsilon - t, \hat{u}_\varepsilon(\cdot)) \\ &\geqslant 1 - e^{-t} + e^{-t} v(y_x(t; u_\varepsilon(\cdot))) \geqslant W(x, t). \end{aligned}$$

因此，只要取 $s = \min\{s_0, s_1\}$。

利用上面的结果，如同第二章中一样，可以容易地得到下述结论：

定理 1.10 设定理1.9的条件成立。假定值函数 $v(\cdot) \in C^1(\boldsymbol{R}^n)$，则 $v(\cdot)$ 满足下述边值问题：

$$\begin{cases} v(x) - H(x, v_x(x)) = 0, \ x \in \boldsymbol{R}^n \backslash M, \\ v|_{\partial M} = 0. \end{cases} \tag{1.49}$$

其中，

$$H(x, p) = 1 + \inf_{u \in U} \langle p, f(x, u) \rangle, \ \forall (x, p) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n. \tag{1.50}$$

需要注意的是，在(1.41)式中，下确界是对所有的 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, \infty)$取的，而不仅仅是对 $\mathscr{U}_x$ 取的。对于给定的 $x \in C(M) \backslash M$，只有 $\mathscr{U}_x$ 中的控制才能使 x 通过系统转移到 M 中，因此，直观上想象下确界应对于 $\mathscr{U}_x$ 来取。但是，那样的结果就无法导致定理1.10。但是，为得到下确界关于 $\mathscr{U}[0, \infty)$来取，必须对 x 作限制，即它属于 $C(M) \backslash M$，并且，

不象第二章中结果，还有时间上的限制，即(1.41)式不能对任何 $t>0$ 成立，只能对某个依赖于 x 的区间 $[0, s]$ 上成立，但这些限制对得到(1.49)来讲是没有影响的。

定理 1.11 设(1.2)、(1.3)式成立，M为 $\boldsymbol{R}^n$ 中非空闭集。若系统(1.1)关于M是短时间一致局部能控的，则值函数 $v(\cdot)$是(1.49)唯一的有界连续粘性解。

证 首先，由(1.41)式并类似于第三章的方法，可证值函数 $v(\cdot)$ 在 $C(M)\setminus M$ 上是在粘性解的意义下满足 (1.49)的，另外，由于

$$v(x)\equiv 1,\ x\in \boldsymbol{R}^n\setminus\overline{C(M)}. \tag{1.51}$$

故 $v(\cdot)$ 在 $\boldsymbol{R}^n\setminus\overline{C(M)}$ 上也满足(1.49)，而边界条件是显然满足的。因此，需证 $v(\cdot)$ 在 $\partial C(M)$ 上也在粘性解的意义下满足方程。为此，设 $\varphi(\cdot)\in C^1(\boldsymbol{R}^n\setminus M)$，$v(\cdot)-\varphi(\cdot)$ 在 $x_0\in\partial C(M)$ 处达到一个局部极大值。由 $C(M)$ 的定义以及短时间一致局部能控性，对任何 $u\in U$，有

$$y_{x_0}(t;u)\notin C(M),\ \forall t\geqslant 0. \tag{1.52}$$

而由 x_0 的定义知

$$v(x_0)-\varphi(x_0)\geqslant v(x)-\varphi(x), \tag{1.53}$$

只要 x 充分靠近x_0(注意到(1.52)和(1.51)式)，因此，当 $t>0$ 充分小时，

$$\varphi(x_0)\leqslant\varphi(y_{x_0}(t;u))+v(x_0)-1=\varphi(y_{x_0}(t;u)), \tag{1.54}$$

故得

$$0\leqslant\langle\varphi_x(x_0),\ f(x_0,u)\rangle,\ \forall u\in U. \tag{1.55}$$

于是

$$\begin{aligned}&v(x_0)-H(x_0,\varphi_x(x_0))\\&=1-1-\inf_{u\in U}\langle\varphi_x(x_0),\ f(x_0,u)\rangle\leqslant 0.\end{aligned} \tag{1.56}$$

所以 $v(\cdot)$ 是 (1.49) 的一个粘性下解。同理可证它也是一个

粘性上解。故 $v(\cdot)$ 是(1.49)式的一个粘性解。唯一性的证明与第三章§2中的类似。注意，此时方程不是定义在整个 $\boldsymbol{R}^n$ 上。利用那里的方法，若有两个粘性解 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$，则有

$$v(x)-\hat{v}(x)\leqslant\sup_{\partial M}(v(x)-\hat{v}(x))=0, \qquad (1.57)$$

从而得到 $v\leqslant\hat{v}$。由对称性，即得 $v=\hat{v}$。

综合上面的结果，可以看到，为求得 $C(M)$，先求出(1.49)的唯一的粘性解 $v(\cdot)$，然后，由(1.15)式可以定出 $C(M)$。

作为上面结果的一个应用，考察下面的系统：

$$\dot{y}(t)=f(y(t)),\ t\geqslant 0. \qquad (1.58)$$

这样的系统常称为自治系统。假设

$$f(0)=0, \qquad (1.59)$$

$$|f(x)-f(\hat{x})|\leqslant L|x-\hat{x}|,\ \forall x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n. \qquad (1.60)$$

若 $y\equiv 0$ 是(1.58)的一个渐近稳定解，即存在 $\delta>0$，使得对任何 $x\in\mathcal{N}_\delta(0)$，方程(1.58)以 x 为初值的唯一解 $y_x(\cdot)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}y_x(t)=0. \qquad (1.61)$$

在许多问题中，如果 $y\equiv 0$ 确是(1.58)的一个渐近稳定解的话，常常可以找到一个 $\delta>0$ 满足上面条件。现在，问题是如何确定

$$S=\{x\in\boldsymbol{R}^n|\lim_{t\to\infty}y_x(t)=0\}. \qquad (1.62)$$

这个集合称之为系统(1.58)的渐近稳定区域。下面，就来用本节中的结果给出 S 的确定。设 $\delta>0$，使得

$$\mathcal{N}_\delta(0)\subset S. \qquad (1.63)$$

任取 $h(\cdot)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\begin{cases} \operatorname{supp} h = \{x \in \mathbf{R}^n \mid h(x) \neq 0\} \subset \mathcal{N}_\delta(0), \\ h(x) = 1,\ x \in \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}(0), \\ 0 \leqslant h(x) \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.64}$$

然后，考虑下述受控系统

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) + h(y(t))u(t),\ t \geqslant 0, \tag{1.65}$$

此处，控制 $u(\cdot)$ 取值于 $\overline{\mathcal{N}_1(0)} \subset \mathbf{R}^n$。取 $M = \{0\}$，则易知，条件(1.2)、(1.3)式成立且系统(1.65)关于M是短时间一致局部能控的。因此，立即得到下述结论。

命题 1.2 系统(1.58)的渐近能稳区域S由下式确定：

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid v(x) < 1\}, \tag{1.66}$$

其中，$v(\cdot)$ 是下述问题唯一的有界连续粘性解：

$$\begin{cases} v(x) - 1 - \langle f(x), v_x(x) \rangle + h(x) |v_x(x)| = 0,\ x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{1.67}$$

§2 动态规划方法与最大值原理的关系

在最优控制理论中，有一个阐述最优控制必要条件的重要结果，叫做*最大值原理*。它是由苏联的庞得里亚金提出来的，故也常称为*庞得里亚金最大值原理*。本节将主要叙述这个结果，并由动态规划方法及 HJB 方程的粘性解理论给出其证明。从中，也可看出两者之间的关系。下面，先叙述最大值原理，考虑下述无状态约束的经典最优控制问题：

问题 C：极小化下述泛函

$$J(y(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, y(t), u(t))\mathrm{d}t + h(y(T)), \tag{2.1}$$

对所有的 $(y(\cdot), u(\cdot))$满足

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=f(t, y(t), u(t)), \text{ a. e. } t\in[0, T], \\ y(0)=x. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$u(t)\in U, \text{ a. e. } t\in[0, T]. \tag{2.3}$$

作如下的通常假设：

(A) $f: [0, T]\times \boldsymbol{R}^n\times U\to \boldsymbol{R}^n$, $f^0: [0, T]\times \boldsymbol{R}^n\times U\to \boldsymbol{R}$, $h: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 是连续的，且满足下述条件：f 和 f^0 对 (t, y) 关于 $u\in U$一致地连续；对任意的 $(t, u)\in[0, T]\times U$, $f(t, \cdot, u)$、$f^0(t, \cdot, u)$ 和 $h(\cdot)$ 是连续可微的；存在常数 $L>0$，使得对任何的 $(t, y, u)\in[0, T]\times \boldsymbol{R}^n\times U$，均有

$$\begin{cases} \|f_y(t, y, u)\|, \|f_y^0(t, y, u)\|, \|h_y(y)\|\leqslant L, \\ \|f(t, y, u)\|, |f^0(t, y, u)|, |h(y)|\leqslant L. \end{cases} \tag{2.4}$$

容易知道，在条件(A)下，对任何

$$u(\cdot)\in \mathscr{U}[0, T]\equiv\{u: [0, T]\to U \mid u(\cdot)\text{可测}\}$$

以及 $x\in \boldsymbol{R}^n$，初值问题(2.2)存在唯一解 $y(\cdot)$。

现在，固定 $(t, x)\in[0, T)\times \boldsymbol{R}^n$，考虑下述初值问题：

$$\begin{cases} \dot{y}_{t,x}(s)=f(s, y_{t,x}(s), u(s)), \text{ a. e. } s\in[t, T], \\ y_{t,x}(t)=x. \end{cases} \tag{2.5}$$

和性能指标

$$J_{t,x}(u(\cdot))=\int_t^T f^0(s, y_{t,x}(s), u(s))\mathrm{d}s+h(y_{t,x}(T)). \tag{2.6}$$

然后，记 $\mathscr{U}[t, T]\equiv\{u(\cdot): [t, T]\to U \mid u(\cdot)\text{ 可测}\}$.

问题 $C_{t,x}$:

寻找 $\bar{u}(\cdot)\in \mathscr{U}[t, T]$，使得

$$J_{t,x}(\bar{u}(\cdot))=\inf_{\mathscr{U}[t,T]} J_{t,x}(u(\cdot))\equiv v(t, x), \tag{2.7}$$

从第二章和第三章可知，上面的 $v(t,x)$ 称为值函数，它是下述 HJB 方程唯一的粘性解：

$$
\begin{cases} v_t(t,x)+H(t,x,v_x(t,x))=0, & (t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^n, \\ v(T,x)=h(x), & x\in\mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{2.8}
$$

此处 $H(t,x,p)$ 称为 Hamilton 函数，它由下式定义

$$
H(t,x,p)=\inf_{u\in U}\{\langle p,f(t,x,u)\rangle+f^0(t,x,u)\},
$$
$$
(t,x,p)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n. \tag{2.9}
$$

现在，定义

$$
\widetilde{H}(t,x,\psi,u)=-f^0(t,x,u)+\langle\psi,f(t,x,u)\rangle,
$$
$$
(t,x,\psi,u)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times U. \tag{2.10}
$$

易知，

$$
\begin{aligned} H(t,x,p)&=\inf_{u\in U}\{-\widetilde{H}(t,x,-p,u)\} \\ &=-\sup_{u\in U}\widetilde{H}(t,x,-p,u). \end{aligned} \tag{2.11}
$$

函数 $\widetilde{H}(t,x,\psi,u)$ 也称为 Hamilton 函数，它在最大值原理的叙述中要用到。下面的定理就是最大值原理。

定理 2.1 设 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^n$ 给定，设 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 为问题 $\mathrm{C}_{t,x}$ 的一个最优对，则存在绝对连续函数 $\psi:[t,T]\to\mathbf{R}^n$，满足下述的共轭方程：

$$
\begin{cases} \dot{\psi}(s)=-f_y(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))^T\psi(s)+f_y^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{a. e. } s\in[t,T], \\ \psi(T)=-h_y(\bar{y}(T)). \end{cases} \tag{2.12}
$$

使得下述最大值条件成立：

$$
\begin{aligned} &\widetilde{H}(s,\bar{y}(s),\psi(s),\bar{u}(s)) \\ &=\max_{u\in U}\widetilde{H}(s,\bar{y}(s),\psi(s),u),\ \text{a. e. } s\in[t,T]. \end{aligned} \tag{2.13}
$$

易见，当 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 存在时，总可以定义出 $\psi(\cdot)$，它称为共轭函数。根据上面的最大值原理，这样得到的 $\psi(\cdot)$ 和 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 满足最大值条件 (2.13)。下面，讨论值函数 $v(t, x)$ 和共轭函数 $\psi(s)$ 以及 Hamilton 函数 $\bar{H}(t, y, \psi, u)$ 之间的一些关系。讨论的最后将给出定理 **2.1** 的证明。首先，引进下述记号：

$$D_x^+ v(t, x) = \left\{ p \in \boldsymbol{R}^n \mid \overline{\lim_{y \to x}} \frac{v(t, y) - v(t, x) - \langle p, y - x \rangle}{\|y - x\|} \right.$$
$$\left. \leqslant 0 \right\},$$

$$D_x^- v(t, x) = \left\{ p \in \boldsymbol{R}^n \mid \underline{\lim_{y \to x}} \frac{v(t, y) - v(t, x) - \langle p, y - x \rangle}{\|y - x\|} \right.$$
$$\left. \geqslant 0 \right\}.$$

同理，定义 $D_{t,x}^+ v(t, x)$ 和 $D_{t,x}^- v(t, x)$。采用第三章中定义 1.13，对于方程(2.8)的粘性解，其定义可写成下述形式：

定义 2.2 连续函数 $v(\cdot, \cdot): [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 称为是(2.8)的一个粘性解，如果终值条件 $v(T, x) = h(x)$，$x \in \boldsymbol{R}^n$ 满足，且对任何 $(p^0, p) \in D_{t,x}^+ v(t, x)(D_{t,x}^-(t, x))$，均成立

$$p^0 + H(t, x, p) \geqslant 0 (\leqslant 0). \tag{2.14}$$

下面，先给出第一个关系。

定理 2.3 设 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 为问题 $\mathrm{C}_{t,x}$ 的一个最优对，则

$$D_x^- v(s, \bar{y}(s)) \subset \{-\psi(s)\} \subset D_x^+ v(s, \bar{y}(s)), \forall s \in [t, T]. \tag{2.15}$$

证 取定 $s \in [t, T]$，对于 $z \in \boldsymbol{R}^n$，令 $y_{s,z}(\cdot)$ 为以 s 为初始时刻，z 为初值，$\bar{u}(\cdot)|_{[s,T]}$ 为控制的轨线。则对任何 $r \in [s, T]$，

$$
\begin{aligned}
y_{s,z}(r)-\bar{y}(r) &= z-\bar{y}(s)+\int_s^r \{f(\theta, y_{s,z}(\theta), \bar{u}(\theta)) \\
&\quad - f(\theta,\bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\}\mathrm{d}\theta \\
&= z-\bar{y}(s)+\int_s^r f_y(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta)) \\
&\quad \cdot(y_{s,z}(\theta)-\bar{y}(\theta))\mathrm{d}\theta \qquad (2.16) \\
&\quad +\int_s^r \varepsilon(\theta;z)(y_{s,z}(\theta)-\bar{y}(\theta))\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\theta;z) = \int_0^1 \{&f_y(\theta, \bar{y}(\theta)+\sigma(y_{s,z}(\theta)-\bar{y}(\theta)), \bar{u}(\theta)) \\
&- f_y(\theta, y(\theta), \bar{u}(\theta))\}\mathrm{d}\theta. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

由条件(A)知，

$$
\begin{cases}
\|\varepsilon(\theta;z)\| \leqslant 2L, & \forall\theta\in[s, T], z\in \boldsymbol{R}^n, \\
\lim\limits_{z\to\bar{y}(s)} \varepsilon(\theta;z) = 0, & \forall\theta\in[s, T].
\end{cases} \qquad (2.18)
$$

注意到，(2.16) 式是一个关于 $y_{s,z}(\cdot)-\bar{y}(\cdot)$ 的线性常微分方程，因此，由常数变易公式可得

$$
\begin{aligned}
y_{s,z}(r)-\bar{y}(r) = \Phi(r, s)(z-\bar{y}(s)) &+\int_s^r \Phi(r, \theta)\varepsilon(\theta;z)(y_{s,z}(\theta) \\
&-\bar{y}(\theta))\mathrm{d}\theta, \quad r\in[s, T]. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

此处，$\Phi(r, s)$满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Phi(r, s) = f_y(r, \bar{y}(r), \bar{u}(r))\Phi(r, s), \quad r\in[s, T], \\
\Phi(s, s) = I.
\end{cases} \qquad (2.20)
$$

利用线性常微分方程的一些基本知识，可知

$$
\sup_{0\leqslant s\leqslant r\leqslant T} \|\Phi(r, s)\| < \infty, \qquad (2.21)
$$

并且共轭方程(2.12)的解可表示为

$$\psi(s) = -\Phi(T, s)^T h_y(\bar{y}(T)) - \int_s^T \Phi(\theta, s)^T f_y^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta, \quad s \in [t, T]. \tag{2.22}$$

另一方面，由 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 的最优性及最优性原理知

$$\begin{aligned} v(t, \bar{y}(t)) &= \int_t^T f^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta + h(\bar{y}(T)) \\ &= \int_t^s f^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \int_s^T f^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta + h(\bar{y}(T)) \\ &\geqslant \int_t^s f^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta + v(s, \bar{y}(s)) \\ &\geqslant \inf_{s \in [t,s]} \left\{ \int_t^s f^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta + v(s, \bar{y}(s)) \right\} \\ &= v(t, \bar{y}(t)), \end{aligned} \tag{2.23}$$

因此，

$$v(s, \bar{y}(s)) = \int_s^T f^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta + h(\bar{y}(T)), \quad \forall s \in [t, T]. \tag{2.24}$$

从而

$$\begin{aligned} v(s, z) - v(s, \bar{y}(s)) &\leqslant \int_s^T \{f^0(\theta, y_{s,z}(\theta), \bar{u}(\theta)) \\ &\quad - f^0(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\}\mathrm{d}\theta \\ &\quad + h(y_{s,z}(T)) - h(\bar{y}(T)) \qquad (2.25) \\ &= \int_s^T \langle f_y^0(\theta, y(\theta), \bar{u}(\theta)), y_{s,z}(\theta) - \bar{y}(\theta)\rangle \mathrm{d}\theta \\ &\quad + \langle h_y(\bar{y}(T)), y_{s,z}(T) - \bar{y}(T)\rangle \\ &\quad + \int_s^T \langle \varepsilon_0(\theta; z), y_{s,z}(\theta) - \bar{y}(\theta)\rangle \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$+o(\|y_{s,z}(T)-\bar{y}(T)\|).$$

此处，

$$\varepsilon_0(\theta;\ z)\equiv\int_0^1\{f_y^0(\theta,\bar{y}(\theta)+\sigma(y_{s,z}(\theta)-\bar{y}(\theta)),\bar{u}(\theta))$$
$$-f_y(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\}\mathrm{d}\theta,\qquad(2.26)$$

易见 $\varepsilon_0(\theta;z)$ 也满足类似于(2.18)的条件.因此，利用(2.19)和(2.22)式，可得

$$\begin{aligned}v(s,z)-v(s,\bar{y}(s))\leqslant&\int_s^T\langle f_y^0(\theta,\bar{y}(\theta),\ \bar{u}(\theta)),\\&\Phi(\theta,s)(z-\bar{y}(s))\rangle\mathrm{d}\theta\\&+\int_s^T\langle f_y^0(\theta,\ \bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta)),\ \int_s^\theta\Phi(\theta,\tau)\varepsilon(\tau;z)\\&(y_{s,z}(\tau)-\bar{y}(\tau))\mathrm{d}\tau\rangle\mathrm{d}\theta\\&+\langle h_y(\bar{y}(T)),\Phi(T,s)(z-\bar{y}(s))\\&+\int_s^T\Phi(T,\tau)\varepsilon(\tau;z)(y_{s,z}(\tau)-\bar{y}(\tau))\mathrm{d}\tau\rangle\qquad(2.27)\\&+\int_s^T\langle\varepsilon_0(\theta;z),y_{s,z}(\theta)-\bar{y}(\theta)\rangle\mathrm{d}\theta\\&+o(\|y_{s,z}(T)-\bar{y}(T)\|)\\&=-\langle\psi(s),z-\bar{y}(s)\rangle+o(\|z-\bar{y}(s)\|).\end{aligned}$$

因此，由定义知

$$-\psi(s)\in D_x^+v(s,\bar{y}(s)).\qquad(2.28)$$

另一方面，对任何 $p\in D_x^-v(s,\bar{y}(s))$，由(2.27)式知

$$\begin{aligned}0\leqslant&\varliminf_{z\to\bar{y}(s)}\frac{v(s,z)-v(s,\bar{y}(s))-\langle p,z-\bar{y}(s)\rangle}{\|z-\bar{y}(s)\|}\\\leqslant&\varliminf_{z\to\bar{y}(s)}\frac{-\langle\psi(s)+p,z-\bar{y}(s)\rangle}{\|z-\bar{y}(s)\|}.\qquad(2.29)\end{aligned}$$

上式意味着

$$\langle\psi(s)+p,w\rangle=0,\ \forall\|w\|=1,\qquad(2.30)$$

从而，$p=-\psi(s)$。这就证得了(2.15)式。

上面结果表明，$D_x^+ v(s,\bar{y}(s))$ 总是非空的，而 $D_x^- v(s,\bar{y}(s))$或者是空集，或者是单点集 $\{-\psi(s)\}$。进一步，若值函数 $v(s,x)$ 在 $x=\bar{y}(s)$处可微，则

$$-\psi(s)=v_x(s,\bar{y}(s)). \qquad (2.31)$$

引理 2.4 设 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 为问题 $C_{t,x}$ 的一个最优对，则对几乎所有的 $s\in[t,T]$，均成立着下述事实：

$$p^0=\tilde{H}(s,\bar{y}(s),-p,\bar{u}(s)),$$
$$\forall(p^0,p)\in D_{t,x}^{\pm}v(s,\bar{y}(s)). \qquad (2.32)$$

证 对 a. e. $s\in[t,T]$，成立着

$$\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\int_s^{s+\delta}\begin{pmatrix}f^0(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\\ f(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\end{pmatrix}d\theta=\begin{pmatrix}f^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\\ f(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\end{pmatrix}. \qquad (2.33)$$

今取定 $s\in[t,T]$，使得上式成立。对于 $(p^0,p)\in D_{t,x}^+v(s,\bar{y}(s))$，有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\varliminf_{r\downarrow s}\frac{1}{|r-t|+\|\bar{y}(r)-\bar{y}(s)\|}\{v(r,\bar{y}(r))-v(s,\\&\qquad\bar{y}(s))-p^0(r-s)-\langle p,\bar{y}(r)-\bar{y}(s)\rangle\}\\&=\varliminf_{r\downarrow s}\frac{1}{|r-t|+\|\bar{y}(r)-\bar{y}(s)\|}\Big\{-\int_s^r f^0(\theta,\\&\qquad\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))d\theta-p^0(r-s)\\&\qquad-\int_s^r\langle p,f(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\rangle d\theta\Big\}\\&=[-f^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))-p^0\\&\qquad-\langle p,f(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\rangle]\frac{1}{1+\|f(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\|},\end{aligned} \qquad (2.34)$$

因此，

$$p^0\leqslant-f^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))-\langle p,f(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\rangle.$$

$$= \widetilde{H}(s, \bar{y}(s), -p, \bar{u}(s)). \tag{2.35}$$

而用同样方法，取 $r \uparrow s$，可得

$$p^0 \geqslant \widetilde{H}(s, \bar{y}(s), -p, \bar{u}(s)). \tag{2.36}$$

从而证得(2.32)式中关于 $(p^0, p) \in D^-_{t,x}v(s, \bar{y}(s))$ 的情形。对于情形 $(p^0, p) \in D^+_{t,x}v(s, \bar{y}(s))$，可以类似证明。

定理 2.5 设 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 为问题 $C_{t,x}$ 的一个最优对，则对几乎所有的 $s \in [t, T]$，成立着

$$D^-_{t,x}v(s, \bar{y}(s)) \subset \{(\widetilde{H}(s, \bar{y}(s), \psi(s), u(s)),$$
$$-\psi(s))\} \subset D^+_{t,x}v(s, \bar{y}(s)). \tag{2.37}$$

证 设 $(p^0, p) \in D^-_{t,x}v(s, \bar{y}(s))$，则自然有 $p \in D^-_x v(s, \bar{y}(s))$，因此，由定理 2.3 知

$$p = -\psi(s). \tag{2.38}$$

从而，由引理 2.4 可得

$$p^0 = \widetilde{H}(s, \bar{y}(s), -p, \bar{u}(s))$$
$$= \widetilde{H}(s, \bar{y}(s), \psi(s), \bar{u}(s)).$$

这便证得 (2.37) 式中的第一个包含关系。往证第二个包含关系。取定 $s \in [t, T]$，使得 (2.33)式成立，且设 $\psi(\cdot)$ 在该点可微。对于 $\tau \in (s, T]$ 和 $z \in \boldsymbol{R}^n$，令 $y_{\tau,z}(\cdot)$ 为系统以 (τ, z)为初时刻和初值、以 $\bar{u}(\cdot)|_{[\tau,T]}$ 为控制的轨线，则对任何 $r \in [\tau, T]$，有

$$y_{\tau,z}(r) - \bar{y}(r) = z - \bar{y}(s) - \int_s^\tau f(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta$$
$$+ \int_\tau^r f_y(\theta, \bar{y}(\theta), \bar{u}(\theta))(y_{\tau,z}(\theta) - \bar{y}(\theta))\mathrm{d}\theta$$
$$+ \int_\tau^r \varepsilon(\theta; \tau, z)(y_{\tau,z}(\theta) - \bar{y}(\theta))\mathrm{d}\theta. \tag{2.39}$$

其中，$\varepsilon(\theta; \tau, z)$一致有界，且当 $(\tau, z) \to (s, \bar{y}(s))$ 时，它趋

于 0。由常数变易公式，有

$$y_{\tau,z}(r)-\bar{y}(r)=\Phi(r,\tau)\left(z-\bar{y}(s)-\int_s^\tau f(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta\right)$$
$$+o(\|z-\bar{y}(s)\|+|\tau-s|)。 \tag{2.40}$$

然后，类似于定理 2.3 的证明，可得

$$\begin{aligned}
&v(\tau,z)-v(s,\bar{y}(s))\leqslant\langle-\psi(\tau),z-\bar{y}(s)\\
&\quad-\int_s^\tau f(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta\rangle\\
&\quad-\int_s^\tau f^0(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta+o(\|z-\bar{y}(s)\|+|\tau-s|)\\
&=\langle-\psi(s)-\dot{\psi}(s)(\tau-s)+o(|\tau-s|),z-\bar{y}(s)\\
&\quad-\int_s^\tau f(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta\rangle-\int_s^\tau f^0(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta\\
&\quad+o(\|z-\bar{y}(s)\|+|\tau-s|),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

由于

$$\|\dot{\psi}(s)\|=\|-f_y(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))^T\psi(s)$$
$$+f_y^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\|\leqslant C。$$

故可由(2.41)式得到

$$\begin{aligned}
&v(\tau,z)-v(s,\bar{y}(s))\leqslant\langle-\psi(s),z-\bar{y}(s)\\
&\quad-\int_s^\tau f(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta\rangle\\
&\quad-\int_s^\tau f^0(\theta,\bar{y}(\theta),\bar{u}(\theta))\mathrm{d}\theta+o(\|z-\hat{y}(s)\|+|\tau-s|)\\
&=\langle-\psi(s),z-\bar{y}(s)\rangle+(t-s)\widehat{H}(s,\bar{y}(s),\psi(s),\bar{u}(s))\\
&\quad+o(\|z-\bar{y}(s)\|+|\tau-s|).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

对于 $\tau<s$，同样可以得到(2.42)式，从而可得

$$(\tilde{H}(s,\bar{y}(s),\psi(s),\bar{u}(s)),\ -\psi(s))\in D^{+}_{t,x}v(s,\bar{y}(s)).\tag{2.43}$$

这便证得(2.37)式中的第二个包含关系。

从(2.37)式立即可知，当 $v(\cdot,\cdot)$在点$(s,\bar{y}(s))$ 可微时，有

$$v_s(s,\bar{y}(s))+\tilde{H}(s,\bar{y}(s),v_y(s,\bar{y}(s)),\bar{u}(s))=0.\tag{2.44}$$

利用上面的定理，可以很容易地给出最大值原理的证明。

定理 2.1 的证明 设 $\psi(\cdot)$ 由 (2.12) 式决定，则由定理 2.5 知(2.43) 式成立，由于值函数 $v(\cdot,\cdot)$是(2.8)式的唯一的粘性解，故由定义 2.2 知

$$\tilde{H}(s,\bar{y}(s),\psi(s),\bar{u}(s))+H(s,\bar{y}(s),-\psi(s))\geqslant 0,\quad \text{a. e. } s\in[t,T].\tag{2.45}$$

因此，由关系式 (2.11)，得到

$$\tilde{H}(s,\bar{y}(s),\psi(s),\bar{u}(s))\geqslant\sup_{u\in U}\tilde{H}(s,\bar{y}(s),\psi(s),u),\quad \text{a. e. } s\in[t,T].\tag{2.46}$$

故最大值条件(2.13)成立。

§3 最优反馈控制

在第二章§2中，曾经谈到人们最初研究动态规划方法的目的是，通过它可以形式上构造出最优反馈控制。由于当时尚没有粘性解的理论，故一切都停留在形式上。本节我们将使其在数学上严格化。

考虑下述系统

$$\begin{cases}\dot{y}_{t,x}(s)=f(s,y_{t,x}(s),u(s)),\ s\in[t,T],\\ y_{t,x}(t)=x.\end{cases}\tag{3.1}$$

以及性能指标

$$J_{t,x}(u(\cdot))=\int_t^T f^0(s,y_{t,x}(s),u(s))\mathrm{d}s+h(y_{t,x}(T)).\tag{3.2}$$

本节中，我们作如下假设：

函数 $f:[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\times U\to\boldsymbol{R}^n$，$f^0:[0,T]\times\boldsymbol{R}^n\times U\to\boldsymbol{R}$ 和$h:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 均是连续的，且关于(t,x)的连续性关于 $u\in U$是一致的。另外，存在常数 $L>0$，使得

$$\begin{cases}\|f(t,x,u)-f(t,\hat{x},u)\|\leqslant L\|x-\hat{x}\|,\\ |f^0(t,x,u)-f^0(t,\hat{x},u)|\leqslant L\|x-\hat{x}\|,\\ |h(x)-h(\hat{x})|\leqslant L\|x-\hat{x}\|,\\ \|f(t,0,u)\|,\ |f^0(t,0,u)|,\ |h(0)|\leqslant L\end{cases}\tag{3.3}$$

对所有的 $x,\hat{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$(t,u)\in[0,T]\times U$ 均成立。

这里的假设要比第二章§2中的略强些。易知，在上述条件下，对任给的 $(t,x)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$ 和 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$，(3.1)存在唯一的解 $y_{t,x}(\cdot)$，从而可见，(3.2)式是有意义的，且下述值函数是可以定义的，

$$v(t,x)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]}J_{t,x}(u(\cdot)).\tag{3.4}$$

在现在的条件下，有下述结果(比较第二章命题2.2)。

命题 3.1 存在常数 $C_1>0$，使得

$$|v(t,x)|\leqslant C_1(1+\|x\|),\ \forall(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n,\tag{3.5}$$

$$|v(t,x)-v(\hat{t},\hat{x})|\leqslant C_1\{(1+\|x\|)|t-\hat{t}|+\|x-\hat{x}\|\},\quad\forall t,\hat{t}\in[0,T],\ x\in\boldsymbol{R}^n.\tag{3.6}$$

读者不难自行完成它的证明。由第三章§2，还知道值函数 $v(\cdot,\cdot)$是下述 HJB 方程唯一的粘性解：

$$\begin{cases} v_t(t, x) + H(t, x, v_x(t, x)) = 0, & (t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n, \\ v(T, x) = h(x), & x \in \boldsymbol{R}^n, \end{cases}$$

(3.7)

此处，

$$H(t, x, p) = \inf_{u \in U} \{\langle p, f(t, x, u)\rangle + f^0(t, x, u)\}, \quad (t, x, u, p) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n. \tag{3.8}$$

由命题 3.5，得知 $v(\cdot, \cdot)$ 是局部 Lipschitz 连续的。因此，它几乎处处可导，几乎处处满足（3.7）式中的方程。稍请注意，此处的"几乎处处"是关于 $(t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n$ 的，因此，对于任何的即便是光滑的函数 $z(\cdot)$：$[0, T] \to \boldsymbol{R}^n$，尽管 $t \mapsto v(t, z(t))$ 是绝对连续的，仍然未必有下述等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t, z(t)) = v_t(t, z(t)) + \langle v_x(t, z(t)), \dot{z}(t)\rangle, \quad \text{a. e. } t \in [0, T], \tag{3.9}$$

因为集合 $\{(t, z(t)), t \in [0, T]\}$ 完全可能正好落在 $v(\cdot, \cdot)$ 不可导的那个 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ 中的零测集中，可见，要使第二章 § 2中的形式过程加以严格化还需仔细作些研究。为此，需要引进些概念。

定义 3.2 设 $w: \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 为一实函数，它在点 (t, x) 沿方向 $(1, \lambda)$ 的 Dini 下导数定义为

$$D^- w(t, x; 1, \lambda) = \varliminf_{\delta \downarrow 0} \frac{w(t + \delta, x + \delta\lambda) - w(t, x)}{\delta}. \tag{3.10}$$

将 $\varliminf\limits_{\delta \downarrow 0}$ 换成 $\varlimsup\limits_{\delta \downarrow 0}$，得到 Dini 上导数 $D^+ w(t, x; 1, \lambda)$ 的定义。若下述等式成立

$$D^- w(t, x; 1, \lambda) = D^+ w(t, x; 1, \lambda), \tag{3.11}$$

则称 $w(\cdot,\cdot)$在点(t,x)沿方向 $(1,\lambda)$ 存在 Dini 方向导数，记之为 $Dw(t,x;1,\lambda)$。

容易知道，当 $w(\cdot,\cdot)$在点(t,x)可导时，有

$$Dw(t,x;1,\lambda)=w_t(t,x)+\langle w_x(t,x),\lambda\rangle. \quad (3.12)$$

这里应指出，不要将第三章中引进的 $D^{\pm}_{t,x}w(t,x)$ 和上述的 $D^{\pm}w(t,x;1,\lambda)$混淆。

现在，再引入下述集合。

$$Q(t,x)=\{(q^0,q)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n \mid \text{存在 } u\in U\text{，使得} \quad (3.13)$$

$$q^0\geqslant f^0(t,x,u),\ q=f(t,x,u)\},$$

$$(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n.$$

可见，$Q(\cdot,\cdot)$是定义于$[0,T]\times\boldsymbol{R}^n$取值于$\boldsymbol{R}^{n+1}$中子集的集值函数。我们以 $\overline{\mathrm{co}}Q$ 表示集合Q的凸闭包，记

$$\mathcal{N}_\delta(t,x)=\{(t',x')\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n \mid |t'-t|+\|x'-x\|<\delta\}.$$

对于集值函数 $Q(t,x)$，假如有

$$\bigcap_{\delta>0}\overline{\mathrm{co}}Q(\mathcal{N}_\delta(t,x))=Q(t,x), \quad (3.14)$$

则称 $Q(\cdot,\cdot)$在点(t,x)具有 Cesari 性质。本节中，总假设$Q(\cdot,\cdot)$在$[0,T]\times\boldsymbol{R}^n$上每一点均具有 Cesari 性质。

进一步，若以问题 $\mathrm{C}_{t,x}$ 表示以 t 为初始时刻，x 为初始状态的相应的最优控制问题，则假定对任给的$(t,x)\in[0,T]\times\boldsymbol{R}^n$，问题$\mathrm{C}_{t,x}$均存在一个最优控制$\bar{u}(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$，即

$$v(t,x)=J_{t,x}(\bar{u}(\cdot)). \quad (3.15)$$

在上述的假设下，我们有下面第一个结果。

定理 3.3 对任何的$(t,x)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$，

$$\min_{(q^0,q)\in Q(t,x)}\{D^-v(t,x;1,q)+q^0\}=0. \quad (3.16)$$

易知，(3.16)式也等价于

$$\min_{u\in U}\{D^-v(t,x;1,f(t,x,u))+f^0(t,x,u)\}=0. \tag{3.17}$$

不难看出，(3.17)式实际上就是 HJB 方程。不过，应当注意的是，(3.17)式是对所有 $(t,x)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$ 均成立的，而前面的 (3.7) 式仅仅是对几乎处处所有的 $(t,x)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$ 成立的。在以后构造综合函数时，这一点是重要的。为了证明上述定理，首先给出下述引理。

引理 3.4 设 $K\subset[0,T]$ 为一个正测度的 Lebesgue 可测集，$\lambda: K\to\boldsymbol{R}^n$ 为一个向量值的可积函数，则

$$\frac{1}{|K|}\int_K\lambda(t)\mathrm{d}t\in\overline{\mathrm{co}}\{\lambda(t);t\in K\}, \tag{3.18}$$

其中，$|K|$表示K的 Lebesgue 测度。

证 由 $\lambda(\cdot)$ 的可积性可知，存在简单函数 $\lambda_i(\cdot)$，使得

$$\lambda_i(t)=\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\chi_{E_{ij}}(t),\ a_{ij}\in\{\lambda(t);t\in K\}, \tag{3.19}$$

$$E_{ij}\cap E_{ij'}=\phi,\ (j\neq j'),\ K=\bigcup_j E_{ij},$$

$$\lim_{i\to\infty}\int_K\|\lambda(t)-\lambda_i(t)\|\mathrm{d}t=0. \tag{3.20}$$

然后，由

$$\frac{1}{|K|}\int_K\lambda_i(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{|K|}\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}|E_{ij}|\in\overline{\mathrm{co}}\{\lambda(t);t\in K\},$$

知(3.18)式成立。

定理 3.3 的证明 首先，任取 $(t,x)\in[0,T)\times\boldsymbol{R}^n$，$u\in U$，令 $y_{t,x}(\cdot)$为对应于常值控制 $u(\cdot)=u$ 的轨线，则由最优性原理(见第二章 §2)知

$$v(t,x)\leqslant\int_t^{t+\delta}f^0(\tau,y_{t,x}(\tau),u)\mathrm{d}\tau + v(t+\delta,y_{t,x}(t+\delta)),\ \forall\delta>0. \tag{3.21}$$

注意到(3.6)式，可知

$$\frac{1}{\delta}\left|v(t+\delta,\ y_{t,x}(t+\delta))-v(t+\delta,\ x+\delta f(t,\ x,\ u))\right|$$

$$\leqslant\frac{C_1}{\delta}\|y_{t,x}(t+\delta)-x-\delta f(t,\ x,\ u)\|$$

$$\leqslant\frac{C_1}{\delta}\left\|\int_t^{t+\delta}[f(\tau,\ y_{t,x}(\tau),\ u)-f(t,\ x,\ u)]\mathrm{d}\tau\right\|\to 0,$$

$$(\delta\to 0). \tag{3.22}$$

因此，由(3.21)式知

$$0\leqslant\frac{1}{\delta}[v(t+\delta,\ x+\delta f(t,\ x,\ u)]$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta}f^0(\tau,\ y_{t,x}(\tau),\ u)\mathrm{d}\tau, \tag{3.23}$$

从而，令 $\delta\to 0$，得

$$D^-v(t,\ x;1,\ f(t,\ x,\ u))+f^0(t,\ x,\ u)\geqslant 0,\ \forall u\in U. \tag{3.24}$$

因此，

$$\min_{(q^0,q)\in Q(t,x)}[D^-v(t,\ x;1,\ q)+q^0]\geqslant 0. \tag{3.25}$$

下面，证明相反的不等式。为此，对给定的 $(t,\ x)\in[0,\ T)\times\boldsymbol{R}^n$，令 $\bar{u}(\cdot)$和$\bar{y}(\cdot)$ 为对应的最优控制和最优轨线，则成立着

$$v(t,\ x)=\int_t^{t+\delta}f^0(\tau,\ \bar{y}(\tau),\ u(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$+v(t+\delta,\ \bar{y}(t+\delta)),\ \delta>0. \tag{3.26}$$

记

$$\begin{cases}q^0(\tau)=f^0(\tau,\ \bar{y}(\tau),\ \bar{u}(\tau)),\\ q(\tau)=f(\tau,\ \bar{y}(\tau),\ \bar{u}(\tau)).\end{cases}$$

则由 $\bar{y}(\cdot)$ 的连续性知，$\forall\varepsilon>0$，当 δ 充分小时，

$$\begin{pmatrix} q^0(\tau) \\ q(\tau) \end{pmatrix} \in Q(\tau, \bar{y}(\tau)) \subset Q(\mathcal{N}_\delta(t, x)), \ \tau \in [t, t+\delta]. \tag{3.27}$$

利用引理 3.4 知

$$\begin{pmatrix} q_\delta^0 \\ q_\delta \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} \begin{pmatrix} q^0(\tau) \\ q(\tau) \end{pmatrix} d\tau \in \overline{co} \left\{ \begin{pmatrix} q^0(\tau) \\ q(\tau) \end{pmatrix}; \tau \in [t, t+\delta] \right\} \subset \overline{co} Q(\mathcal{N}_\delta(t, x)). \tag{3.28}$$

另一方面，易见，$q^0(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 是一致有界的，从而，q_δ^0 和 q_δ 也均是有界的。因此，可设(注意 $Q(\cdot, \cdot)$ 的 Cesari 性质)

$$\begin{pmatrix} q_{\delta_k}^0 \\ q_{\delta_k} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q^0 \\ q \end{pmatrix} \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}\, Q(\mathcal{N}_\delta(t, x)) = Q(t, x), \ (k \to \infty) \tag{3.29}$$

再注意到

$$\bar{y}(t+\delta_k) = x + \int_t^{t+\delta_k} f(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau \tag{3.30}$$
$$= x + \delta_k q_{\delta_k} = x + \delta_k q + o(\delta_k), \ (k \to \infty),$$

因此，由(3.26)式知

$$0 = [v(t+\delta_k, \bar{y}(t+\delta_k)) - v(t, x)]/\delta_k$$
$$+ \frac{1}{\delta_k}\int_t^{t+\delta_k} f^0(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau)) d\tau \tag{3.31}$$
$$= \frac{1}{\delta_k}[v(t+\delta_k, x+\delta_k q) - v(t, x)] + q_{\delta_k}^0 + o(1).$$

故知

$$0 \geqslant \varliminf_{\delta \downarrow 0} \left\{ \frac{v(t+\delta, x+\delta q) - v(t, x)}{\delta} + q_\delta^0 \right\} \tag{3.32}$$
$$= D^- v(t, x; 1, q) + q^0.$$

这便证得了定理 3.3。

现在，定义下述集函数。

$$F(t, x) = \{q \in \boldsymbol{R}^n | \exists q^0 \in \boldsymbol{R}, \text{ 使得 } \begin{pmatrix} q^0 \\ q \end{pmatrix} \in Q(t, x), \text{ 且 } D^- v(t, x; 1, q) + q^0 = 0\}. \tag{3.33}$$

由(3.17)式可知

$$F(t, x) = \{f(t, x, u) | D^- v(t, x; 1, f(t, x, u)) + f^0(t, x, u) = 0, u \in U\}. \tag{3.34}$$

由定理3.3知,对每个 $(t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$, $F(t, x)$ 均是非空的。

定理 3.5 设 $(t, x) \in [0, T) \times \boldsymbol{R}^n$, 令 $y_{t,x}(\cdot)$ 为下述微分包含的任意一个解,

$$\begin{cases} \dot{y}_{t,x}(s) \in F(s, y_{t,x}(s)), \\ y_{t,x}(t) = x, \end{cases} \tag{3.35}$$

则 $y_{t,x}(\cdot)$ 必为问题 $C_{t,x}$ 的一条最优轨线。

证 记 $y_{t,x}(\cdot)$为 (3.35) 的一个解。类似于第二章 §3 中的菲利浦夫引理, 可证此时必存在函数 $\tilde{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[t, T]$, 使得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_{t,x}(s) = f(s, \tilde{y}_{t,x}(s), \tilde{u}(s)), \\ D^- v(s, \tilde{y}_{t,x}(s); 1, f(s, \tilde{y}_{t,x}(s), \tilde{u}(s))) \\ \quad + f^0(s, \tilde{y}_{t,x}(s), \tilde{u}(s))) = 0. \end{cases} \tag{3.36}$$

现在,说明 $(\tilde{y}_{t,x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$为问题 $C_{t,x}$ 的一个最优对。由于 $s \to v(s, \tilde{y}_{t,x}(s))$ 是一个绝对连续函数,从而, 由定理3.3的证明知,对几乎处处的 $s \in [t, T]$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v(s, \tilde{y}_{t,x}(s)) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} [v(s + \delta, \tilde{y}_{t,x}(s + \delta)) - v(s, \tilde{y}_{t,x}(s))]$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} [v(s + \delta, \tilde{y}_{t,x}(s) + \delta f(s, \tilde{y}_{t,x}(s), \tilde{u}(s)))$$

$$-v(s,\tilde{y}_{t,x}(s))]$$
$$=D^{-}v(s,\tilde{y}_{t,x}(s);1,f(s,\tilde{y}_{t,x}(s),\tilde{u}(s))) \tag{3.37}$$
$$=-f^0(s,\tilde{y}_{t,x}(s),u(s)),$$

从而，

$$h(y_{t,x}(T))-v(t,x)=\int_t^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}v(s,\tilde{y}_{t,x}(s))\mathrm{d}s$$
$$-\int_t^T f^0(s,\tilde{y}_{t,x}(s),\tilde{u}(s))\mathrm{d}s. \tag{3.38}$$

由此得到

$$v(t,x)=\int_t^T f^0(s,\tilde{y}_{t,x}(s),\tilde{u}(s))\mathrm{d}s+h(\tilde{y}_{t,x}(T))$$
$$=J_{t,x}(\tilde{u}(\cdot)), \tag{3.39}$$

故 $(\tilde{y}_{t,x}(\cdot),\tilde{u}(\cdot))$是最优的。在 (3.37) 式中，第三个等式是由于在所考虑的点 s 上的极限是存在的，而第四个等式是由$\tilde{u}(\cdot)$的定义得到的。

从上面的讨论中可知，为了求解原来的问题 $C_{t,x}$，先求出 HJB 方程唯一的粘性解 $v(\cdot,\cdot)$，然后，由(3.34)式确定出 $F(t,x)$，最后再求解微分包含 (3.35)。注意到，最优控制 $\tilde{u}(\cdot)$ 是由(3.36)式中第二个式子确定的，因此，它是一个反馈形式的控制．正因为如此，称函数 $F(\cdot,\cdot)$ 给出了一个广义的反馈闭环系统。下面，给出一个简单的例子。

例　设所考虑的系统为

$$\dot{y}(t)=u(t),\ u(t)\in U=[-1,1],\ y\in\mathbf{R},\ t\in[0,1], \tag{3.40}$$

目标泛函为

$$J(u)=-y(1)^2. \tag{3.41}$$

不难写出值函数 $v(\cdot,\cdot)$满足的 HJB 方程

$$\begin{cases} v_t(t,x)-|v_x(t,x)|=0, & (t,x)\in[0,1)\times\boldsymbol{R}, \\ v(1,x)=-x^2, & x\in\boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{3.42}$$

且可求出如下的 $v(\cdot,\cdot)$:

$$v(t,x)=\begin{cases} -[x+(1-t)]^2, & x\geqslant 0, \\ -[x-(1-t)]^2, & x\leqslant 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

从而,得

$$\begin{cases} Dv(t,x;1,\lambda)=2(1-\lambda)[x+(1-t)], & x>0, \\ Dv(t,x;1,\lambda)=-2(1+\lambda)[x-(1-t)], & x<0, \\ Dv(t,0;1,\lambda)=2(1-t)(1-|\lambda|). \end{cases} \tag{3.44}$$

故可知

$$F(t,x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ \{\pm 1\}, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases} \tag{3.45}$$

从而可知最优轨线为:

$$y_{t,x}(s)=x+(s-t),\ (x\geqslant 0), \tag{3.46}$$

$$y_{t,x}(s)=x-(s-t),\ (x\leqslant 0). \tag{3.47}$$

因此,最优控制取决于初状态,故它是反馈形式的.

还可以一般地讨论何时微分包含(3.35)式存在解。限于篇幅,在此就不详述了.

§4 粘性解的一种离散逼近

本节将给出一个较为简单的 HJB 方程粘性解的离散逼近,它对于研究算法是很有帮助的.

考虑无限时区定常最优控制问题,且设控制函数 $u(\cdot)$ 仅取有限个值。因此,系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u(t)), \ t \geqslant 0, \\ y_x(0) = x, \end{cases} \tag{4.1}$$

目标泛函为($\lambda > 0$)

$$J_x(u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} \mathrm{d}t, \tag{4.2}$$

而 $u(\cdot)$ 取值于$U = \{1, 2, \cdots, m\}$，因此，相应的 HJB 方程为

$$\lambda v(x) - \min_{1 \leqslant i \leqslant m} [\langle v_x(x), f(x, i) \rangle + f^0(x, i)] = 0,$$

$$x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{4.3}$$

作如下通常假设：$\forall x, \hat{x} \in \boldsymbol{R}^n, i \in \{1, 2, \cdots, m\}$,

$$\| f(x, i) - f(\hat{x}, i) \| \leqslant L \| x - \hat{x} \|, \tag{4.4}$$

$$| f^0(x, i) - f^0(\hat{x}, i) | \leqslant L \| x - \hat{x} \|^r, \tag{4.5}$$

$$\| f(x, i) \|, \ | f^0(x, i) | \leqslant L, \tag{4.6}$$

此处，$L \geqslant 1$, $r \in (0, 1]$. 易见，由于 f^0 有界，故 (4.2) 式恒有定义。

现在，引入(4.3)式的逼近。令 $h > 0$ 为一个参数，则直观地，先引入下述方程

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \lambda v^h(x) - \frac{v^h(x + h f(x, i)) - v^h(x)}{h} - f^0(x, i) \right\} = 0, \ x \in \boldsymbol{R}^n, \tag{4.7}$$

也即

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{ \lambda h v^h(x) - v^h(x + h f(x, i)) + v^h(x) - h f^0(x, i) \} = 0, \ x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{4.8}$$

由此，再引入

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{ v^h(x) - (1 - \lambda h) v^h(x + h f(x, i)) - h f^0(x, i) \} = 0, \ x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{4.9}$$

上面(4.9)式是由(4.8)式中将第一项 $\lambda h v^h(x)$改为 $\lambda h v^h(x +$

$hf(x, i))$而得到的。下面将会看到，(4.9)式用起来更为方便。

定理 4.1 设 $\lambda > rL$，则对任何 $h \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$，(4.9) 式存在唯一的解 $v^h(\cdot)$ 满足

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |v^h(x)| \leqslant \frac{L}{\lambda}, \tag{4.10}$$

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|v^h(x_1) - v^h(x_2)|}{|x_1 - x_2|^r} \leqslant \frac{L}{\lambda - rL}. \tag{4.11}$$

证 令X为定义于 $\mathbf{R}^n$ 的有界 Hölder 连续函数全体，定义

$$\|v\|_X = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |v(x)| + \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|v(x_1) - v(x_2)|}{|x_1 - x_2|^r},$$
$$\forall v(\cdot) \in X. \tag{4.12}$$

记

$$|v|_{0,r} = \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|v(x_1) - v(x_2)|}{|x_1 - x_2|^r}. \tag{4.13}$$

定义算子$\mathscr{T}$如下：$\forall v(\cdot) \in C(\mathbf{R}^n)$，

$$\mathscr{T} v(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \{(1 - \lambda h) v(x + hf(x, i))$$
$$+ hf^0(x, i)\}, x \in \mathbf{R}^n. \tag{4.14}$$

现在，任取 $v(\cdot)$，$\hat{v}(\cdot) \in X$，令 d，$\hat{d} \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使得

$$\begin{cases} \mathscr{T} v(x) = (1 - \lambda h) v(x + hf(x, d)) + hf^0(x, d), \\ \mathscr{T} \hat{v}(x) = (1 - \lambda h) \hat{v}(x + hf(x, \hat{d})) + hf^0(x, \hat{d}). \end{cases} \tag{4.15}$$

应当注意，d 和 $\hat{d}$ 均是依赖于 x 的。然后，有下述估计式：

$$\mathscr{T} v(x) - \mathscr{T} \hat{v}(x) = (1 - \lambda h)[v(x + hf(x, d))$$
$$- \hat{v}(x + hf(x, \hat{d}))] + h[f^0(x, d) - f^0(x, \hat{d})]$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (1-\lambda h)[v(x+hf(x,\hat{d}))-\hat{v}(x+hf(x,\hat{d}))]\\
&\quad +\mathscr{T}v(x)-\{(1-\lambda h)v(x+hf(x,\hat{d}))+hf^0(x,\hat{d})\}\\
&\leqslant (1-\lambda h)\sup_x|v(x)-\hat{v}(x)|.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

利用 $v(\cdot)$ 和 $\hat{v}(\cdot)$ 的地位对称性，得到

$$
\sup_x|\mathscr{T}v(x)-\mathscr{T}\hat{v}(x)|\leqslant(1-\lambda h)\sup_x|v(x)-\hat{v}(x)|,
\tag{4.17}
$$

所以，$\mathscr{T}$ 是 $C_b(\boldsymbol{R}^n)\equiv\{$有界一致连续函数$\}$上的一个压缩映照。因此，它存在唯一的不动点 $v^h(\cdot)\in C_b(\boldsymbol{R}^n)$，它满足(4.9)式。为证 $v^h(\cdot)\in X$，任取 $x_1, x_2\in\boldsymbol{R}^n$，令 $d_1, d_2\in\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$，使得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{T}v(x_i)=(1-\lambda h)v(x_i+hf(x_i, d_i))\\
+hf^0(x_i, d_i),\ i=1, 2,
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

则有下述不等式(比较(4.16)式)：

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{T}v(x_1)-\mathscr{T}v(x_2)=(1-\lambda h)[v(x_1+hf(x_1, d_1))\\
&\quad -v(x_2+hf(x_2, d_2))]+h[f^0(x_1, d_1)-f^0(x_2, d_2)]\\
&\leqslant(1-\lambda h)[v(x_1+hf(x_1, d_2))-v(x_2+hf(x_2, d_2))]\\
&\quad +h[f^0(x_1, d_2)-f^0(x_2, d_2)] \qquad (4.19)\\
&\leqslant(1-\lambda h)|v|_{0,r}\{\|x_1-x_2\|+h\|f(x_1, d_2)-f(x_2, d_2)\|\}^r\\
&\quad +h|f^0(x_1, d_2)-f^0(x_2, d_2)|\\
&\leqslant\{(1-\lambda h)|v|_{0,r}(1+hL)^r+hL\}\|x_1-x_2\|^r.
\end{aligned}
$$

于是，利用 $v(x_1)$ 和 $v(x_2)$的对称地位，得到

$$
|\mathscr{T}v|_{0,r}\leqslant(1-\lambda h)(1+hL)^r|v|_{0,r}+hL.
\tag{4.20}
$$

记 $\theta(h)=(1-\lambda h)(1+hL)^r$，则

$$
\theta(0)=1,\ \theta\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0,
$$

$$\theta'(h) = -\lambda(1+hL)^r + rL(1-\lambda h)(1+hL)^{r-1}$$
$$= -[\lambda - rL + \lambda Lh(1+r)](1+hL)^{r-1} < 0,$$
$$\forall h \in \left(0,\ \frac{1}{\lambda}\right).$$

此处，应注意 $\lambda > rL$。从而得到

$$\theta(h) < 1,\ h \in (0,1). \tag{4.21}$$

故定义

$$C_h = \frac{hL}{1-(1-\lambda h)(1+hL)^r}. \tag{4.22}$$

则当 $|v|_{0,r} \leqslant C_h$ 时，由(4.20)式可得

$$|\mathscr{T}v|_{0,r} \leqslant (1-\lambda h)(1+hL)^r C_h + hL = C_h, \tag{4.23}$$

于是，任取 $v_0 \in X$，$|v_0|_{0,r} \leqslant C_h$，作迭代 $\mathscr{T}^n v_0$。由于 $\mathscr{T}$ 是在 $C_b(\boldsymbol{R}^n)$ 上压缩的，故 $\mathscr{T}^n v_0(\cdot) \to v^h(\cdot)$，$v^h(\cdot)$ 为(4.9)的唯一解。另一方面，由(4.23)式知

$$|v^h(\cdot)|_{0,r} \leqslant C_h, \tag{4.24}$$

从而得证 $v^h(\cdot) \in X$。最后，再来证明(4.10)、(4.11)式。

易见，作为 h 的函数 C_h 是单调下降的，事实上

$$\frac{d}{dh} C_h = \frac{L(1-\theta(h)) + Lh\theta'(h)}{(1-\theta(h))^2}$$
$$= \frac{L}{(1-\theta(h))^2}[1-\theta(h) + h\theta'(h)], \tag{4.25}$$

所以只要说明

$$\varphi(h) \equiv 1-\theta(h) + h\theta'(h) \leqslant 0, \quad \forall h \in \left(0,\ \frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.26}$$

有

$$\varphi(0) = 1-\theta(0) = 0, \tag{4.27}$$

而

$$\varphi'(h) = -\theta'(h) + \theta'(h) + h\theta''(h) = h\theta''(h), \tag{4.28}$$

故需说明

$$
\begin{aligned}
0\geqslant\theta''(h)&=-\lambda L(1+r)(1+hL)^{r-1}\\
&\quad+(1-r)[\lambda-rL+\lambda Lh(1+r)](1+hL)^{r-2}\\
&=(1+hL)^{r-2}\{-\lambda L(1+r)(1+hL)\\
&\quad+(1-r)[\lambda-rL+\lambda Lh(1+r)]\}\\
&=(1+hL)^{r-2}\{-\lambda L(1+r)+(1-r)(\lambda-rL)\\
&\quad+h[-\lambda L^2(1+r)+(1-r)\lambda L(1+r)]\}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

由于 $L\geqslant 1$,

$$
\begin{cases}
-\lambda L(1+r)+(1-r)(\lambda-rL)\\
\quad=-\lambda[L(1+r)-(1-r)]-(1-r)rL\leqslant 0,\\
-\lambda L^2(1+r)+(1-r)\lambda L(1+r)\\
\quad=-[L-(1-r)]\lambda L(1+r)\leqslant 0.
\end{cases}
\tag{4.30}
$$

因此 $\theta''(h)\leqslant 0$。从而得知 $h\mapsto C_h$ 是单调下降的，因此，由(4.24)式知

$$
|v^h|_{0,r}\leqslant\lim_{h\downarrow 0}C_h=\lim_{h\downarrow 0}\frac{L}{-\theta'(h)}=\frac{L}{\lambda-rL},\tag{4.31}
$$

这便是(4.11)式。再由方程(4.9)知

$$
|v^h(x)|\leqslant(1-\lambda h)\sup_x|v^h(x)|+hL,\tag{4.32}
$$

从而可立即得到(4.10)式。

定理 4.2 当 $h\to 0$ 时，$v^h(x)\to v(x)$ 关于 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 是局部一致的，且 $v(\cdot)$ 是方程(4.3)唯一的粘性解。

证 由定理 4.1 知 $\left\{v^h(\cdot),\ h\in\left(0,\ \frac{1}{\lambda}\right)\right\}$ 是一族等度连续函数，故由 Arzelà-Ascoli 定理知，存在子序列 $v^{h_k}(x)\to v(x)$ 关于 x 在任何给定的有界集上一致。下面，证明 $v(\cdot)$ 是(4.3) 的一个粘性解。为此，任取 $\phi\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$，假定 $v-\phi$ 在 x_0 点取到一个局部极大值，则类似于第三章 §1，不妨设

x_0是$v-\phi$的一个局部严格极大值．故存在一个以x_0为中心的闭球B，使得

$$v(x_0)-\phi(x_0)>v(x)-\phi(x),\ \forall x\in B\setminus\{x_0\}. \tag{4.33}$$

令$x_0^{h_k}\in B$为函数$v^{h_k}(\cdot)-\phi(\cdot)$在$B$上的最大值点，则由$v^{h_k}(\cdot)$的局部一致收敛性以及(4.33)式，可知

$$x_0^{h_k}\to x_0,\ (k\to\infty). \tag{4.34}$$

从而，当k足够大时，

$$x_0^{h_k}+h_k f(x_0^{h_k},i)\in B,\ \forall 1\leqslant i\leqslant m. \tag{4.35}$$

因此，由$x_0^{h_k}$的定义知

$$\begin{aligned}v^{h_k}(x_0^{h_k})-\phi(x_0^{h_k})\geqslant & v^{h_k}(x_0^{h_k}+h_k f(x_0^{h_k},i))\\ & -\phi(x_0^{h_k}+h_k f(x_0^{h_k},i)),\ 1\leqslant i\leqslant m.\end{aligned} \tag{4.36}$$

故，利用方程(4.9)，可得

$$\begin{aligned}0=&\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{v^{h_k}(x_0^{h_k})-(1-\lambda h_k)v^{h_k}(x_0^{h_k}+h_k f(x_0^{h_k},i))\\ &-h_k f^0(x_0^{h_k},i)\}\\ &\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\phi(x_0^{h_k})-\phi(x_0^{h_k}+h_k f(x_0^{h_k},i))\\ &+\lambda h_k v^{h_k}(x_0^{h_k}+h_k f(x_0^{h_k},i))-h_k f^0(x_0^{h_k},i)\}.\end{aligned}$$

注意到$\phi\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$，在上式中，除以$h_k$，然后令$k\to\infty$，可以得到

$$0\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{-\langle\phi_x(x_0),f(x_0,i)\rangle+\lambda v(x_0)-f^0(x_0,i)\}. \tag{4.37}$$

由粘性解的定义知，$v(\cdot)$是(4.3)的一个粘性下解，同理可证$v(\cdot)$也是(4.3)的一个粘性上解，故$v(\cdot)$是(4.3)的一个粘性解。再利用第三章§2的唯一性定理知，$v(\cdot)$是(4.3)唯一的粘性解，从而，整个序列$v^h(\cdot)$是局部一致收敛的。

下面，给出相应于$v^h(\cdot)$的最优控制问题。

引入下述离散系统，

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + f(y_k, d_k)h, \ k=0, 1, 2, \cdots, \\ y_0 = x. \end{cases} \tag{4.38}$$

而

$$d_k = \alpha(kh), \ k=0, 1, 2, \cdots, \tag{4.39}$$

$\alpha(\cdot) \in \mathscr{U} \equiv \{\alpha: [0, \infty) \to \{1, 2, \cdots, m\} \mid \alpha(\cdot) \text{ 可测}\}$，令目标泛函为

$$J_x^h(\alpha(\cdot)) = h\sum_{k=0}^{\infty} f^0(y_k, d_k)(1-\lambda h)^k. \tag{4.40}$$

定义 $d_h^*: \mathbf{R}^n \to \{1, 2, \cdots, m\}$ 如下：

$$d_h^*(x) = \min\{d \in \{1, 2, \cdots, m\} \mid v^h(x) = (1-\lambda h)v^h(x+f(x, d)h) + f^0(x, d)h\}, \tag{4.41}$$

然后，令

$$\alpha_h^*(s) = d_h^*(y_k), \ s \in [kh, (k+1)h), \ k=0, 1, 2, \cdots. \tag{4.42}$$

命题 4.3 方程(4.9)的解 $v^h(\cdot)$ 满足下述条件：

$$v^h(x) \leqslant J_x^h(\alpha(\cdot)), \ \forall x \in \mathbf{R}^n, \ \alpha(\cdot) \in \mathscr{U}, \tag{4.43}$$

$$v^h(x) = J_x^h(\alpha_h^*(\cdot)), \ \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{4.44}$$

证 由(4.9)式知(令 $d_k = \alpha(kh)$, $\alpha(\cdot) \in \mathscr{U}$)

$$\begin{aligned} v^h(x) &= \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \{(1-\lambda h)v^h(x+hf(x, i)) + hf^0(x, i)\} \\ &\leqslant (1-\lambda h)v^h(y_1) + hf^0(x, d_1) \\ &\leqslant \cdots \leqslant (1-\lambda h)^k v^h(y_k) \\ &\quad + h\sum_{i=0}^{k-1} f^0(y_i, d_i)(1-\lambda h)^i, \ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4.45}$$

此处，y_i 由(4.38)式确定。令 $k \to \infty$，注意到 $0 < 1-\lambda h < 1$，立即得到(4.43)式。而当 $\alpha(\cdot)$ 取作 $\alpha_h^*(\cdot)$ 时，(4.45)式中的所有等号成立，因此，得到(4.44)式。

上面命题说明，$v^h(\cdot)$ 是以（4.38）式为受控系统，以(4.40)式为目标泛函的最优控制问题的值函数。因此，由定理 4.2，我们可将上述离散最优控制问题看作为原来最优控制问题的一个离散逼近。进一步，还有下面结果。

定理 4.4 设 $\alpha_h^*(\cdot)$ 由(4.42)式定义，则

$$\lim_{h\to 0} J_x(\alpha_h^*(\cdot)) = \inf_{\mathscr{A}} J_x(\alpha(\cdot)) \equiv v(x), \tag{4.46}$$

也即 $\{\alpha_h^*(\cdot)\}$ 是原控制问题的一个极小化序列。

证 对任何 $T>0, h\in\left(0, \dfrac{1}{\lambda}\right)$，有

$$\begin{aligned}
&|J_x^h(\alpha_h^*(\cdot)) - J_x(\alpha_h^*(\cdot))| \\
&\leqslant \Big|h\sum_{k=0}^{[T/h]-1} f^0(y_k, d_k^*)(1-\lambda h)^k \\
&\quad - \int_0^T f^0(y_x(s), \alpha_h^*(s))e^{-\lambda s}ds\Big| \\
&\quad + \Big|h\sum_{k=[T/h]}^{\infty} f^0(y_k, \alpha_k^*)(1-\lambda h)^k\Big| \\
&\quad + \Big|\int_T^\infty f^0(y_x(s), \alpha_h^*(s))e^{-\lambda s}ds\Big|.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

此处 $[T/h]$ 为不超过 T/h 的最大整数，而 $d_k^* = \alpha_h^*(kh)$。于是，$\forall\varepsilon>0$，当 $T>0$ 充分大时，有

$$|J_x^h(\alpha_h^*(\cdot)) - J_x(\alpha_h^*(\cdot))| \leqslant E(h, T) + 2\varepsilon. \tag{4.48}$$

此处，

$$\begin{aligned}
E(h, T) &= \Big|\sum_{k=0}^{[T/h]-1} f^0(y_k, d_k^*)(1-\lambda h)^k \\
&\qquad - \int_0^T f^0(y_x(s), \alpha_h^*(s))e^{-\lambda s}ds\Big| \\
&= \sum_{k=0}^{[T/h]-1}\int_{kh}^{(k+1)h} [f^0(y_k, d_k^*)(1-\lambda h)^k \\
&\qquad - f^0(y_x(s), d_k^*)e^{-\lambda s}]ds
\end{aligned}$$

$$-\int_{h[T/h]}^{T} f^0(y_x(s), \alpha_h^*(s)) e^{-\lambda s} \mathrm{d}s \Big| \quad (4.49)$$

$$\leqslant L \sum_{k=0}^{[T/h]-1} \int_{kh}^{(k+1)h} [|y_k - y_x(s)|^r (1-\lambda h)^k$$

$$+ |(1-\lambda h)^k - e^{-\lambda s}|] \mathrm{d}s + L(T - h[T/h]).$$

现在来证明下述事实。

$$\begin{cases} \|y_k - y_x(s)\| \leqslant C_T h, \\ |(1-\lambda h)^k - e^{-\lambda s}| \leqslant C_T h, \\ s \in [kh, (k+1)h], \ 0 \leqslant k \leqslant [T/h] - 1. \end{cases} \quad (4.50)$$

此处，$C_T > 0$ 不依赖于 h。为此，定义分段常值函数：

$$z(s) = y_k, \ s \in [kh, (k+1)h), \ 0 \leqslant k \leqslant [T/h] - 1, \quad (4.51)$$

对任何 $s \in [0, h([T/h]-1)]$，设 $s \in [kh, (k+1)h)$。则

$$\|z(s) - y_x(s)\| = \|y_k - y_x(s)\|$$

$$\leqslant \|y_{k+1} - y_x(s)\| + Lh$$

$$\leqslant \|y_k - y_x(kh)\| + \left\|\int_{kh}^{s} [f(y_k, d_k^*) - f(y_x(\tau), d_k^*)] \mathrm{d}\tau\right\|$$

$$+ \|[(k+1)h - s] f(y_k, d_k^*)\| + Lh$$

$$\leqslant \|y_k - y_x(kh)\| + L\int_{kh}^{s} \|y_k - y_x(\tau)\| \mathrm{d}\tau + 2Lh$$

$$\leqslant \|y_{k-1} - y_x((k-1)h)\| + L\int_{(k-1)h}^{s} \|z(\tau) - y_x(\tau)\| \mathrm{d}\tau$$

$$+ 2Lh \leqslant \cdots\cdots \leqslant L\int_0^s \|z(\tau) - y_x(\tau)\| \mathrm{d}\tau + 2Lh,$$

从而，由 Gronwall 不等式知

$$\|z(s) - y(s)\| \leqslant e^{Ls} \cdot 2Lh \leqslant 2Le^{LT} h, \ \forall s \in [0, h[T/h] - h], \quad (4.52)$$

这就证得了(4.50)式中的第一式，而第二式的证明可以利用第一式的结果。需注意，若取 $y(s) = e^{-\lambda s}$，则 $f(y) = -\lambda y$，此

时，有 $y_k=(1-\lambda h)^k$，从而可得到第二式。这样，(4.49)式可导致下述结果：

$$E(h,\ T)\leqslant L[T/h][C_T^r h^r\cdot h+C_T h^2]+L(T-h[T/h])$$
$$\leqslant LT(C_T^r h^r+C_T h)+Lh\to 0,\ (h\to 0)。\quad (4.53)$$

因此，由(4.48)式，得证

$$\lim_{h\to 0}|J_x^h(\alpha_h^*(\cdot))-J_x(\alpha_h^*(\cdot))|=0。\quad (4.54)$$

由于 $J_x^h(\alpha_h^*(\cdot))=v^h(x)$，故利用定理 4.2，得到(4.46)式。

后　　记

第一章的内容主要取材于一些标准的教科书，§1 中的关于 Lebesgue 积分的理论，采用了参考文献 [4] 的非常简洁的叙述方法。对于初学者，可能较难，但对略知实变函数论的读者，提纲式的复习是容易接受的。§2 中常微分方程理论主要取材于参考文献 [3]，这是复旦大学数学系的一本标准教程。§3 和 §4 叙述了有关泛函分析及算子半群的理论，这些材料取之于参考文献[4]和[31]。有兴趣的读者可以阅读所提及的这两本书以更详尽地了解这方面的丰富结果。在§5 中，详细叙述了由线性偏微分方程理论到拟线性方程的过渡。这样做的目的是让读者能知道一些偏微分方程的先验估计的技巧，这部分内容仅是参考文献[25]中的很小一部分。

在第二章中，我们系统地叙述了动态规划方法及 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的一些形式推导。§1 和 §2 的内容散见于一些专著或教科书中，有兴趣的读者可以进一步阅读参考文献[1, 8, 29]。这部分内容现在通常归功于 R. Bellman，尽管他当时的理论是不太严格的，但这种思想首先是他提出的。§3中叙述了二人零和微分对策理论，我们的材料取之于参考文献[21]。二人零和微分对策方面的主要工作应归功于 R. Isaacs[26]，A. Friedman[24]，W. H. Fleming [23]，R. J. Elliot 和 N. J. Kalton[20]，L. D. Berkovitz[10, 11]，N. N. Krasovskii 和A. I. Subbotin[28]，等等。§4 中的最优转换问题取材于参考文献 [14]，不过

[14]中仅讨论了无限时区问题，作者在此补上了有限时区情形，使得形式上得以完整。§5和§6主要是作者的工作，基本取材于参考文献[39]，同时也参考了参考文献[44]。对于随机脉冲控制问题，有兴趣的读者可以参阅A. Bensoussan和J. L. Lions合著的《Impulse Control and Quasi-Varistional Inequalities》(参考文献[9])。§7中的问题的一般提法是作者提出的，这部分内容基本取材于参考文献[41]和[42]。有关一些特殊的随机情形，可参看参考文献[37, 38]。

第三章应该说是本书的最重要的部分。§1中的叙述综合了一些文献，大体包括参考文献[17, 18, 27, 29]。§2中的唯一性定理的证明方法取之于H. Ishii的工作(参考文献[27])。作者认为这比最初的参考文献[17, 18]中的方法来得更简洁和易懂。§3中存在性定理的叙述综合了参考文献[17, 18, 29]的一些方式。这部分内容并没有十分展开，主要原因是我们不想引入太多的有关偏微分方程的知识。粘性解的理论应归功于M. G. Crandall和P. L. Lions，§4和§5的内容是取材于作者的工作(参考文献[39, 41, 42, 44])，而条件(5.11)是作者提出的。

在第四章中，介绍了无限维最优控制问题的动态规划方法。§1中的内容是作者的工作，还不曾发表过。§2和§3的内容取材于作者的工作(参考文献[40]，同时参考了S. Stojanovic和作者的合作文章(参考文献[34, 35])。有关无限维二人零和对策问题的材料限于篇幅，没有列入，有兴趣的读者可以参看参考文献[43]。§4中给出了Stegall引理的证明，迄今不曾见有专门给出这样证明的书。我们并不关心许多Banach空间的理论，而只求给出Stegall引理的一个完整

的证明。该节取材于参考文献 [19, 33]。作者认为这样的证明有助于希望了解 Stegall 引理证明的读者。关于无限维的 HJB 方程理论还有一些其他处理方法，但似乎均没有像有限维情形那样来得完整。

在第五章中，给出了一些动态规划方法和 HJB 方程粘性解的一些应用。§1 取材于彭实戈与作者的合作工作(参考文献 [32])。§2 取材于周迅宇的博士论文(参考文献 [5])，而 §3 的内容来自于 L. D. Berkovitz 的文章(参考文献[12])。作者认为，上述内容仅仅是一些典型的应用例子，许多应用方面的工作还处于研究阶段，§4 中给出了 HJB 方程的离散逼近。这部分内容取材于 I. Cappuzzo Dolcetta 的工作(参考文献 [13])。离散化使得具体的算法可以得到实施。这里没有充分展开这一部分内容，其原因是，这方面的研究目前仍然在进行之中，还不十分完善。有兴趣的读者可以阅读参看文献[15, 16, 22, 36]。

参 考 文 献

[1] 张学铭，李训经，陈祖浩，最优控制系统的微分方程理论，高等教育出版社(1989)。

[2] 庞特里雅金等，最佳过程的数学理论，陈祖浩 等 译，上海科学技术出版社(1981)。

[3] 金福临，李训经 等，常微分方程(第二版)，上海科学技术出版社(1978)。

[4] 夏道行 等，实变函数与泛函分析，人民教育出版社(1979)。

[5] 周迅宇，"最优控制理论中最大值原理，动态规划方法及其相互关系"，复旦大学博士论文(1989)。

[6] G. Barles, *Deterministic impulse control problems*, SIAM J. Control & Optim., 23 (1985), 419—432.

[7] E. N. Barron, L. C. Evans and R. Jensen, *Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls*, J. Diff. Eqn., 53 (1984), 213—233.

[8] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press (1957).

[9] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities*, Bordes, Paris (1984).

[10] L. D. Berkovitz, *The existence of value and saddle point in differential games of fixed duration*, SIAM J. Control & Optim 23 (1985), 172—196.

[11] L. D. Berkovitz, *Character izations of the values of differential games*, Appl. Math. Optim., 17 (1987), 177—

183.

[12] L. D. Berkovitz, *Optimal feedback controls*, SIAM J. Control & Optim., 27 (1989), 367—377.

[13] I. Capuzzo Dolcetta, *On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming*, Appl. Math. Optim., 10 (1983), 367—377.

[14] I. Capuzzo Dolcetta and L. C. Evans, *Optimal switching for ordinary differential equations*, SIAM J. Control & Optim., 22 (1984), 143—161.

[15] I. Capuzzo Dolcetta and M. Falcone, *Viscosity solutions and discrete dynamic programming*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non. Lin., 6 (supp) (1989), 161—183.

[16] I. Capuzzo Dolcetta and H. Ishii, *Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory*, Appl. Math. Optim., 11 (1984), 161—181.

[17] M. G. Crandall, L. C. Evans and P. L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 282 (1984), 487—502.

[18] M. G. Crandall and P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), 1—42.

[19] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, AMS Providence (1977).

[20] R. J. Elliot and N. J. Kalton, *The existence of value in differential games*, Mem. Amer. Math. Soc., 126 (1972).

[21] L. C. Evans and P. E. Souganidis, *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*, Indiana Univ. Math. J., 33

(1984), 773—797.

[22] M. Falcone, *A numerical approach to the infinite horizon problem of deterministic control theory*, Appl. Math. Optim., 15 (1987), 1—13.

[23] W. H. Fleming, *The convergence problem for differential games II*, Ann. Math. Study No. 52, Priceton Univ. Press, Priceton, N. J., (1964), 195—210.

[24] A. Friedman, *Differential Games*, Wilely, New York (1971).

[25] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd Edition, Springer-Verlag (1983).

[26] R. Isaacs, *Differential Games*, John Wiley, New York, (1965).

[27] H. Ishii, *Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations*, Indiana Univ. Math. J., 33 (1984), 721—748.

[28] N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, Springer-Verlag, New York (1988).

[29] P. L. Lions *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Pitman (1982).

[30] P. L. Lions and P. E. Souganidis, *Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs' equations*, SIAM J. Control & Optim., 21 (1985), 566—583.

[31] A. Pazy, *Semigroup of Linear Operators and Applications to Parial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1983).

[32] S. Peng and J. Yong, *Determination of controllable set for a controlled dynamic system*, J. Austral Math. Soc.

Ser. B., to appear.

[33] C. Stegall, *Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces*, Math. Ann., 236 (1978), 171—176.

[34] S. Stojanovic and J. Yong, *Optimal switching for systems governed by nonlinear evolution equations*, Numer. Funct. Anal. Optim., 9(9&10) (1987), 995—1030.

[35] S. Stojanovic and J. Yong, *Optimal switching for partial differential equations I, II*, J. Math. Anal. Appl., 138 (1989), 416—460.

[36] P. E. Souganidis, *Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, J. Diff. Eqn., 57 (1985), 1—43.

[37] N. Yamada, *A system of elliptic variational inequalities associated with a stochastic switching game*, Hiroshima Math. J., 13 (1983), 109—132.

[38] N. Yamada, *Viscosity solutions for a system of elliptic variational inequalities with bilateral obstacles*, Funckcialaj Ekvacioj, 30 (1987), 417—425.

[39] J. Yong, *Systems governed by ordinary differential equations with continuous, switching and impulse controls*, Appl. Math. Optim., 20 (1989), 223—235.

[40] J. Yong, *Optimal switching and impulse controls for distributed parameter systems*, Sys. Sci. & Math, Sci., 2 (1989), 137—160.

[41] J. Yong, *Differential games with switching strategies*, J. Math. Anal. Appl., 145 (1990), 445—469.

[42] J. Yong, *A zero-sum differential game in a finite duration with switching strategies*, SIAM J. Control & Optim., 28 (1990), 1234—1250.

[43] J. Yong, *Existence of the value for a differential game*

with switching strategies in a Banach space, Sys. Sci & Math. Sci., 4(1991), No. 4, 17—36

[44] J. Yong, *Zero-sum differential games involving impulse controls*, submitted.